Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

3. Beispielklausur mit Lösungen

AUFGABE 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *Abbildung* F von einer Menge L in eine Menge M.
(2) Die *Fakultät* einer natürlichen Zahl n.
(3) Die *Konvergenz* einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K gegen $x \in K$.
(4) Der *Real*- und der *Imaginärteil* einer komplexen Zahl z.
(5) Die *Stetigkeit in einem Punkt* $a \in \mathbb{K}$ einer Abbildung $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.
(6) Die *Kosinusreihe* zu $z \in \mathbb{C}$.
(7) Eine *Stammfunktion* einer Abbildung $f : D \to \mathbb{K}$ auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{K}$.
(8) Eine *lineare inhomogene* gewöhnliche Differentialgleichung.

Lösung

(1) Eine *Abbildung* F von L nach M ist dadurch gegeben, dass jedem Element der Menge L genau ein Element der Menge M zugeordnet wird.
(2) Unter der Fakultät von n versteht man die Zahl
$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$$
(3) Man sagt, dass die Folge gegen x konvergiert, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.
Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung
$$|x_n - x| \leq \epsilon$$
gilt.
(4) Zu einer komplexen Zahl $z = a + bi$ nennt man a den Realteil und b den Imaginärteil von z.
(5) Man sagt, dass f stetig im Punkt a ist, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, dass für alle x mit $|a - x| \leq \delta$ die Abschätzung $|f(a) - f(x)| \leq \epsilon$ gilt.
(6) Die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

heißt die Kosinusreihe zu z.

(7) Eine Funktion
$$F\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$
heißt Stammfunktion zu f, wenn F auf D differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

(8) Eine Differentialgleichung der Form
$$y' = g(t)y + h(t)$$
mit zwei auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktionen $t \mapsto g(t)$ und $t \mapsto h(t)$ heißt inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung.

Aufgabe 2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Satz von Bolzano-Weierstraß*.
(2) Das *Schubfachprinzip* (oder *Taubenschlagprinzip*).
(3) Der *Zwischenwertsatz*.
(4) Die *Quotientenregel* für differenzierbare Abbildungen (für einen Punkt).

Lösung

(1) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge von reellen Zahlen. Dann besitzt die Folge eine konvergente Teilfolge.

(2) Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und N eine endliche Menge mit n Elementen. Es sei $m > n$. Dann gibt es keine injektive Abbildung
$$M \longrightarrow N.$$

(3) Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = c$.

(4) Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und
$$f,g\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$
zwei Funktionen, die in a differenzierbar seien. Wenn g keine Nullstelle in D besitzt, so ist f/g differenzierbar in a mit
$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}\,.$$

Aufgabe 3. Erläutere das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

Lösung

Mit dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion werden Aussagen $A(n)$ bewiesen, die von den natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ abhängen. Man beweist zuerst die Aussage $A(0)$. Ferner zeigt man, dass man für alle n aus der

Gültigkeit von $A(n)$ auf die Gültigkeit von $A(n+1)$ schließen kann. Daraus folgt die Gültigkeit von $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4. Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f\colon\ L \longrightarrow N,\, x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

Lösung

Seien $x_1, x_2 \in L$ gegeben mit $f(x_1) = f(x_2)$. Wir müssen zeigen, dass $x_1 = x_2$ ist. Es ist

$$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2).$$

Da nach Voraussetzung $g \circ f$ injektiv ist, folgt $x_1 = x_2$, wie gewünscht.

Aufgabe 5. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Zu einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ sei eine reelle Folge rekursiv durch

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{2}$$

definiert. Zeige die folgenden Aussagen.

(a) Bei $x_0 > a$ ist $x_n > a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge ist streng fallend.

(b) Bei $x_0 = a$ ist die Folge konstant.

(c) Bei $x_0 < a$ ist $x_n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge ist streng wachsend.

(d) Die Folge konvergiert.

(e) Der Grenzwert ist a.

Lösung

(a) Die Eigenschaft $x_n > a$ folgt durch Induktion, wobei die Voraussetzung $x_0 > a$ unmittelbar den Induktionsanfang ergibt. Der Induktionsschluss ergibt sich mittels

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{2} > \frac{a + a}{2} = a.$$

Das strenge Fallen ergibt sich daraus durch

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{2} < \frac{x_n + x_n}{2} = x_n.$$

(b) Die Konstanz ergibt sich durch Induktion, wobei die Voraussetzung $x_0 = a$ den Induktionsanfang sichert und der Induktionsschluss aus

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{2} = \frac{a + a}{2} = a$$

folgt.

(c) Die Eigenschaft $x_n < a$ folgt durch Induktion, wobei die Voraussetzung $x_0 < a$ unmittelbar den Induktionsanfang ergibt. Der Induktionsschluss ergibt sich mittels

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{2} < \frac{a+a}{2} = a.$$

Das strenge Wachstum ergibt sich daraus durch

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{2} > \frac{x_n + x_n}{2} = x_n.$$

(d) Nach (a), (b), (c) ist die Folge in jedem Fall monoton und beschränkt, daher konvergiert sie in $\mathbb{R}$.

(e) Der Grenzwert sei x. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}.$$

Wir wenden die Rechenregeln für Limiten auf die Rekursionsvorschrift an und erhalten

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + a}{2} = \frac{x+a}{2}.$$

Daraus ergibt sich $x = a$.

Aufgabe 6. Beweise den Satz von Bolzano-Weierstraß.

Lösung

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch

$$a_0 \le x_n \le b_0$$

beschränkt. Wir definieren zuerst induktiv eine Intervallhalbierung derart, dass in den Intervallen unendlich viele Folgenglieder liegen. Das Startintervall ist $I_0 := [a_0, b_0]$. Sei das k-te Intervall I_k bereits konstruiert. Wir betrachten die beiden Hälften

$$[a_k, \frac{a_k + b_k}{2}] \text{ und } [\frac{a_k + b_k}{2}, b_k]\,.$$

In mindestens einer der Hälften liegen unendlich viele Folgenglieder, und wir wählen als Intervall I_{k+1} eine Hälfte mit unendlich vielen Gliedern. Da sich bei diesem Verfahren die Intervalllängen mit jedem Schritt halbieren, liegt eine Intervallschachtelung vor. Als Teilfolge wählen wir nun ein beliebiges Element

$$x_{n_k} \in I_k$$

mit $n_k > n_{k-1}$. Dies ist möglich, da es in diesen Intervallen unendlich viele Folgenglieder gibt. Diese Teilfolge konvergiert gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl x.

Aufgabe 7. Untersuche, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{4n^3-3n+2}$$

konvergiert oder divergiert.

Lösung

Für $n \geq 5$ ist

$$2n+5 \leq 3n$$

und für $n \geq 1$ ist

$$4n^3-3n+2 = n^3+3n^3-3n+2 \geq n^3+3n(n^2-1) \geq n^3.$$

Daher gilt für die Reihenglieder für $n \geq 5$ die Abschätzung

$$\frac{2n+5}{4n^3-3n+2} \leq \frac{3n}{4n^3-3n+2} \leq \frac{3n}{n^3} = 3\frac{1}{n^2}.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert nach Beispiel 9.12 und dies gilt auch für $\sum_{n=1}^{\infty} 3\frac{1}{n^2}$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert auch

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2n+5}{4n^3-3n+2}$$

und daher konvergiert auch die in Frage stehende Reihe.

Aufgabe 8. Es seien

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

streng wachsende Funktionen, die auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmen. Folgt daraus $f = g$?

Lösung

Wir betrachten die beiden Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ falls } x < \sqrt{2}\,, \\ x+1, \text{ falls } x \geq \sqrt{2}\,, \end{cases}$$

und

$$g(x) = \begin{cases} x, \text{ falls } x \leq \sqrt{2}\,, \\ x+1, \text{ falls } x > \sqrt{2}\,. \end{cases}$$

Beide Funktionen sind streng wachsend und stimmen auf $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\}$ und insbesondere auf $\mathbb{Q}$ überein. Es ist aber $f(\sqrt{2}) \neq g(\sqrt{2})$, so dass die beiden Funktionen verschieden sind.

Aufgabe 9. Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer dritten Potenz, vermindert um das Vierfache ihrer zweiten Potenz, gleich der Quadratwurzel von 42 ist?

Lösung

Es geht um eine reelle Lösung für die Gleichung

$$f(x) = x^3 - 4x^2 = \sqrt{42}\,.$$

Es ist $f(0) = 0$ und $f(5) = 25$ und $0 \leq \sqrt{42} \leq 25$. Da f als Polynomfunktion stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{42}$.

Aufgabe 10. Es seien $b > a$ reelle Zahlen. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi\colon\ C^0([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(]a,b[,\mathbb{R}),\ f \longmapsto f|_{]a,b[}.$$

Zeige, dass Ψ injektiv, aber nicht surjektiv ist.

Lösung

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)}$ ist eine rationale Funktion von $]a,b[$ nach $\mathbb{R}$, also stetig. Für $x \to a$ konvergiert der Nenner gegen 0, so dass die Funktion unbeschränkt ist. Eine auf einem abgeschlossenen Intervall definierte stetige Funktion ist aber nach Satz 13.9 beschränkt, so dass f nicht die Einschränkung einer stetigen Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sein kann. Die Abbildung Ψ ist also nicht surjektiv.

Für eine stetige Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x \in]a,b[, x \to a} g(x) = g(a)$$

und

$$\lim_{x \in]a,b[, x \to b} g(x) = g(b)\,.$$

Die stetige Funktion g ist also durch ihre Werte auf dem offenen Intervall $]a,b[$ eindeutig bestimmt, so dass Ψ injektiv ist.

Aufgabe 11. Beweise die Funktionalgleichung der komplexen Exponentialfunktion, also die Identität

$$\exp\,(z + w) = \exp\, z \cdot \exp\, w$$

für $z, w \in \mathbb{C}$.

Lösung

Das Cauchy-Produkt der beiden Exponentialreihen ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{z^i}{i!} \frac{w^{n-i}}{(n-i)!}$. Diese Reihe ist nach Lemma 15.2 absolut konvergent und der Grenzwert ist das Produkt der beiden Grenzwerte. Andererseits ist der n-te Summand der Exponentialreihe von $z+w$ nach der allgemeinen binomischen Formel gleich

$$\frac{(z+w)^n}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} z^i w^{n-i} = c_n,$$

so dass die beiden Seiten übereinstimmen.

Aufgabe 12. Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Es sei $I \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

mit

$$b_n = \begin{cases} a_n, & \text{falls } n \in I, \\ 0 \text{ sonst}, \end{cases}$$

ebenfalls absolut konvergent mit einem Konvergenzradius $\geq r$ ist.

Lösung

Wir müssen zeigen, dass die Reihe für jedes $z \in \mathbb{C}$, $|z| < r$, absolut konvergiert. Es ist

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n z^n| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n| \, |z|^n .$$

Für die Reihenglieder gilt

$$|b_n| \, |z|^n \leq |a_n| \, |z|^n .$$

Da die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \, |z|^n$ nach Voraussetzung konvergiert, liegt eine konvergente Majorante vor, so dass auch die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ absolut konvergiert.

Aufgabe 13. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \cos(\ln x) .$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

Lösung

a) Es ist

$$f'(x) = -\frac{1}{x} \cdot \sin(\ln x) .$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\left(\frac{\sin\,(\ln x)}{x}\right)' \\ &= -\frac{\cos\,(\ln x) - \sin\,(\ln x)}{x^2} \\ &= -\frac{\cos\,(\ln x)}{x^2} + \frac{\sin\,(\ln x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 14. Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = e^{x^2} - x$$

im Entwicklungspunkt $a = 1$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 1 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Lösung

Wir berechnen zuerst die Ableitungen, diese sind

$$f'(x) = 2xe^{x^2} - 1\,,$$

$$f''(x) = 2e^{x^2} + 2x2xe^{x^2} = \left(2 + 4x^2\right)e^{x^2}\,,$$

$$f'''(x) = (8x)\,e^{x^2} + 2x\left(2 + 4x^2\right)e^{x^2} = \left(12x + 8x^3\right)e^{x^2}\,,$$

$$f''''(x) = \left(12 + 24x^2\right)e^{x^2} + 2x\left(12x + 8x^3\right)e^{x^2} = \left(12 + 48x^2 + 16x^4\right)e^{x^2}\,.$$

Somit ist

$$f(1) = e - 1,\ f'(1) = 2e - 1,\ f''(1) = 6e,\ f'''(1) = 20e,\ f''''(1) = 76e\,.$$

Das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 1 ist demnach

$$e - 1 + (2e - 1)\,(x - 1) + 3e\,(x - 1)^2 + \frac{10e}{3}\,(x - 1)^3 + \frac{19e}{6}\,(x - 1)^4$$

Aufgabe 15. Berechne durch geeignete Substitutionen eine Stammfunktion zu

$$\sqrt{3x^2 + 5x - 4}\,.$$

Lösung

Wir schreiben

$$3x^2 + 5x - 4 \quad = \quad (\sqrt{3}x + \frac{5}{2\sqrt{3}})^2 - \frac{25}{12} - 4$$

$$\begin{aligned} &= (\sqrt{3}x + \frac{5}{2\sqrt{3}})^2 - \frac{73}{12} \\ &= \frac{73}{12}\left((\frac{\sqrt{12}\sqrt{3}}{\sqrt{73}}x + \frac{5\sqrt{12}}{2\sqrt{3}\sqrt{73}})^2 - 1 \right) \\ &= \frac{73}{12}\left((\frac{6}{\sqrt{73}}x + \frac{5}{\sqrt{73}})^2 - 1 \right). \end{aligned}$$

Daher ist mit der Substitution

$$u = \frac{6}{\sqrt{73}}x + \frac{5}{\sqrt{73}}$$

bzw.

$$x = \frac{\sqrt{73}}{6}u - \frac{5}{6}$$

$$\int \sqrt{3x^2 + 5x - 4}\, dx = \int \sqrt{\frac{73}{12}(u^2 - 1)} \cdot \frac{\sqrt{73}}{6}\, du = \frac{73}{12\sqrt{3}} \int \sqrt{u^2 - 1}\, du.$$

Eine Stammfunktion hiervon ist

$$\frac{73}{12\sqrt{3}} \frac{1}{2}(u\sqrt{u^2 - 1} - \operatorname{arcosh} u)$$

und damit ist

$$\frac{73}{24\sqrt{3}}\left((\frac{6}{\sqrt{73}}x + \frac{5}{\sqrt{73}})\sqrt{(\frac{6}{\sqrt{73}}x + \frac{5}{\sqrt{73}})^2 - 1} - \operatorname{arcosh}(\frac{6}{\sqrt{73}}x + \frac{5}{\sqrt{73}}) \right)$$

eine Stammfunktion von

$$\sqrt{3x^2 + 5x - 4}.$$

Aufgabe 16. Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{x^3 + x}{x^2 - 1}$$

für $x > 1$.

Lösung

Es handelt sich um eine rationale Funktion, bei der der Zählergrad größer als der Nennergrad ist. Daher führen wir zuerst die Division mit Rest durch, diese liefert

$$x^3 + x = (x^2 - 1)x + 2x$$

bzw.

$$\frac{x^3 + x}{x^2 - 1} = x + 2\frac{x}{x^2 - 1}.$$

Eine Stammfunktion des hinteren Summanden ist

$$\ln\left(x^2 - 1\right),$$

daher ist insgesamt

$$\frac{1}{2}x^2 + \ln\left(x^2 - 1\right)$$

eine Stammfunktion von $\frac{x^3+x}{x^2-1}$.

Aufgabe 17. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 2 \text{ mit } y(5) = 3\,.$$

Lösung

Eine Lösung ist

$$y(x) \;=\; 2x - 7,$$

wie man unmittelbar durch Ableiten und Einsetzen bestätigt.