Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

3. Beispielklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	3	2	8	6	5	3	2	4	4	3	2	4	5	4	1	64
erhaltene Pkt.:																		

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *Abbildung* F von einer Menge L in eine Menge M.
(2) Die *Fakultät* einer natürlichen Zahl n.
(3) Die *Konvergenz* einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K gegen $x \in K$.
(4) Der *Real*- und der *Imaginärteil* einer komplexen Zahl z.
(5) Die *Stetigkeit in einem Punkt* $a \in \mathbb{K}$ einer Abbildung $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.
(6) Die *Kosinusreihe* zu $z \in \mathbb{C}$.
(7) Eine *Stammfunktion* einer Abbildung $f : D \to \mathbb{K}$ auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{K}$.
(8) Eine *lineare inhomogene* gewöhnliche Differentialgleichung.

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Satz von Bolzano-Weierstraß*.
(2) Das *Schubfachprinzip* (oder *Taubenschlagprinzip*).
(3) Der *Zwischenwertsatz*.
(4) Die *Quotientenregel* für differenzierbare Abbildungen (für einen Punkt).

AUFGABE 3. (3 Punkte)

Erläutere das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

AUFGABE 4. (2 Punkte)

Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f\colon\ L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

AUFGABE 5. (8 (2+1+2+1+2) Punkte)

Es sei $a \in \mathbb{R}$. Zu einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ sei eine reelle Folge rekursiv durch

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{2}$$

definiert. Zeige die folgenden Aussagen.

(a) Bei $x_0 > a$ ist $x_n > a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge ist streng fallend.

(b) Bei $x_0 = a$ ist die Folge konstant.

(c) Bei $x_0 < a$ ist $x_n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge ist streng wachsend.

(d) Die Folge konvergiert.

(e) Der Grenzwert ist a.

Aufgabe 6. (6 Punkte)

Beweise den Satz von Bolzano-Weierstraß.

Aufgabe 7. (5 Punkte)

Untersuche, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{4n^3 - 3n + 2}$$

konvergiert oder divergiert.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Es seien

$$f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

streng wachsende Funktionen, die auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmen. Folgt daraus $f = g$?

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer dritten Potenz, vermindert um das Vierfache ihrer zweiten Potenz, gleich der Quadratwurzel von 42 ist?

Aufgabe 10. (4 Punkte)

Es seien $b > a$ reelle Zahlen. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi \colon C^0([a,b], \mathbb{R}) \longrightarrow C^0(]a,b[, \mathbb{R}),\ f \longmapsto f|_{]a,b[}.$$

Zeige, dass Ψ injektiv, aber nicht surjektiv ist.

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Beweise die Funktionalgleichung der komplexen Exponentialfunktion, also die Identität

$$\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w$$

für $z, w \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 12. (3 Punkte)

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Es sei $I \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

mit

$$b_n = \begin{cases} a_n, & \text{falls } n \in I, \\ 0 \text{ sonst,} \end{cases}$$

ebenfalls absolut konvergent mit einem Konvergenzradius $\geq r$ ist.

Aufgabe 13. (2 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \cos(\ln x)\,.$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

Aufgabe 14. (4 Punkte)

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = e^{x^2} - x$$

im Entwicklungspunkt $a = 1$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 1 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe 15. (5 Punkte)

Berechne durch geeignete Substitutionen eine Stammfunktion zu

$$\sqrt{3x^2 + 5x - 4}\,.$$

Aufgabe 16. (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{x^3 + x}{x^2 - 1}$$

für $x > 1$.

Aufgabe 17. (1 Punkt)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 2 \text{ mit } y(5) = 3\,.$$