**Fachbereich Mathematik/Informatik**
**Prof. Dr. H. Brenner**

# Analysis I

## 2. Beispielklausur mit Lösungen

Aufgabe 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Die *Produktmenge* aus zwei Mengen $L$ und $M$.
(2) Die *Hintereinanderschaltung* der Abbildungen
$$F\colon L \longrightarrow M$$
und
$$G\colon M \longrightarrow N.$$
(3) Eine *Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ von komplexen Zahlen $a_k$.
(4) Ein *Häufungspunkt* einer reellen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(5) Die *komplexe Exponentialfunktion.*
(6) Das *Treppenintegral* zu einer Treppenfunktion
$$t\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem Intervall $I = [a, b]$ zur Unterteilung $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ und den Werten $t_i$, $i = 1, \ldots, n$.
(7) Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
(8) Die *gewöhnliche Differentialgleichung* zu einer Funktion
$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Lösung

(1) Man nennt die Menge
$$L \times M = \{(x, y) |\, x \in L,\, y \in M\}$$
die Produktmenge der Mengen $L$ und $M$.
(2) Die Abbildung
$$G \circ F\colon L \longrightarrow N,\, x \longmapsto G(F(x)),$$
heißt die Hintereinanderschaltung der Abbildungen $F$ und $G$.

(3) Unter der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ versteht man die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \, .$$

(4) Eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt der Folge, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder $x_n$ mit $|x_n - x| \leq \epsilon$ gibt.

(5) Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \exp\, z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

heißt (komplexe) Exponentialfunktion.

(6) Das Treppenintegral von $t$ ist durch

$$T := \sum_{i=1}^{n} t_i(a_i - a_{i-1})$$

definiert.

(7) Die Funktion $f$ heißt Riemann-integrierbar, wenn die Einschränkung von $f$ auf jedes kompakte Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist.

(8) Man nennt die Gleichung

$$y' = f(t, y)$$

gewöhnliche Differentialgleichung zu $f$.

Aufgabe 2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Die *allgemeine binomische Formel* für $(a + b)^n$.
(2) Die *Konvergenzaussage* für die geometrische Reihe in $\mathbb{C}$.
(3) Der *Identitätssatz für Potenzreihen.*
(4) Die *Substitutionsregel* zur Integration von stetigen Funktionen (erste Version).

Lösung

(1) Es gilt

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

(2) Für alle komplexen Zahlen $z$ mit $|z| < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ absolut und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z} \, .$$

(3) Es seien $f = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ und $g = \sum_{n=0}^\infty b_n z^n$ Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien und derart, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, dass die dadurch definierten Funktionen

$$f, g \colon\, U(0, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{K}$$

übereinstimmen. Dann ist $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(4) Sei $I$ ein reelles Intervall und sei

$$f \colon\, I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei

$$g \colon\, [a, b] \longrightarrow I$$

stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\, ds\,.$$

Aufgabe 3. Berechne die Gaußklammer von $-\frac{133}{3}$.

Lösung

Es ist

$$-44 = -\frac{132}{3}$$

und

$$-45 = -\frac{135}{3}\,,$$

daher ist

$$-45 \,\leq\, -\frac{133}{3} \,<\, -44,$$

also ist

$$\lfloor -\frac{133}{3} \rfloor \,=\, -45.$$

Aufgabe 4. Zeige mittels vollständiger Induktion für $n \geq 1$ die Formel

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k \,=\, \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ bei } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n+1}{2} \text{ bei } n \text{ ungerade}\,. \end{cases}$$

Lösung

Bei $n = 1$ besteht die Summe links aus dem einzigen Summanden $(-1)^1 1 = -1$, die Summe ist also $-1$. Da 1 ungerade ist, steht rechts $-\frac{2}{2} = -1$, der Induktionsanfang ist also gesichert.

Sei die Aussage nun für $n$ bewiesen, und es ist die Gültigkeit der Aussage für $n+1$ zu zeigen. Die Summe links ist

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k \;=\; \left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\right) + (-1)^{n+1}(n+1).$$

Bei $n$ gerade (also $n+1$ ungerade) ist dies nach Induktionsvoraussetzung gleich

$$\frac{n}{2} + (-1)^{n+1}(n+1) \;=\; \frac{n}{2} - (n+1) \;=\; \frac{n-2n-2}{2} \;=\; \frac{-n-2}{2} \;=\; -\frac{n+2}{2},$$

was mit der rechten Seite übereinstimmt. Bei $n$ ungerade (also $n+1$ gerade) ist die Summe nach Induktionsvoraussetzung gleich

$$-\frac{n+1}{2}+(-1)^{n+1}(n+1) \;=\; -\frac{n+1}{2}+(n+1) \;=\; \frac{-n-1+2n+2}{2} \;=\; \frac{n+1}{2},$$

was ebenfalls mit der rechten Seite übereinstimmt.

Aufgabe 5. Betrachte die Folge $x_n = (-1)^n$ und $x = -1$. Welche der Pseudokonvergenzbegriffe (siehe Anhang) treffen zu?

Lösung

Richtig sind (4), (5), (6), (7).

Aufgabe 6. Zeige, dass die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

nur im Nullpunkt 0 stetig ist.

Lösung

Sei zunächst $x = 0$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann kann man $\delta = \epsilon$ setzen, denn aus $\mid u \mid \leq \epsilon$ folgt auch $\mid f(u) \mid \leq \epsilon$. Sei nun $x \neq 0$. Wir zeigen, dass man für $\epsilon = \mid \frac{x}{2} \mid > 0$ kein $\delta > 0$ mit der Abschätzungseigenschaft für die Stetigkeit finden kann. Sei hierzu $\delta > 0$ vorgegeben und sei $c = \min\,(\delta, \epsilon)$. Wenn $x$ rational ist, so wählen wir eine irrationale Zahl $u \in ]x-c, x+c[$, wenn $x$ irrational ist, so wählen wir eine rationale Zahl $q \in ]x-c, x+c[$. Im ersten Fall gilt

$$|f(x) - f(u)| \;=\; |x| \;>\; \epsilon,$$

im zweiten Fall gilt

$$|f(x) - f(q)| \;=\; |q| \;>\; \epsilon,$$

so dass in beiden Fällen die $\delta$-Umgebung von $x$ nicht in die $\epsilon$-Umgebung von $f(x)$ abgebildet wird.

Aufgabe 7. Zeige, dass eine konvergente Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = 0$ für alle geraden Indizes eine ungerade Funktion darstellt.

Lösung

Nach Voraussetzung besitzt die Potenzreihe die Gestalt

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} z^{2k+1}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} f(-z) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} (-z)^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} (-1)^{2k+1} z^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} (-1) z^{2k+1} \\ &= -\left( \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} z^{2k+1} \right) \\ &= -f(z). \end{aligned}$$

Die Funktion ist also ungerade.

Aufgabe 8. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine bijektive differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und der Umkehrfunktion $f^{-1}$. Was ist an folgendem „Beweis“ für die Ableitung der Umkehrfunktion nicht korrekt?

Es ist

$$(f \circ f^{-1})(y) = y\,.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir durch beidseitiges Ableiten die Gleichung

$$(f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = 1\,.$$

Also ist

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(f'(f^{-1}(y))}\,.$$

Lösung

Die Kettenregel setzt voraus, dass beide Abbildungen differenzierbar sind, das weiß man hier aber von $f^{-1}$ nicht.

Aufgabe 9. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto f(x),$$

eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 1$ und mit $f'(x) = \lambda f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $f$ die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Lösung

Wir betrachten die zusammengesetzte Funktion $g(x) = \ln f(x)$, die wohldefiniert ist, da $f$ nur positive Werte annimmt. Die Funktion $g$ ist differenzierbar mit

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\lambda f(x)}{f(x)} = \lambda.$$

Die Ableitung ist also konstant gleich $\lambda$, daher ist $g(x) = \lambda x + c$. Somit ist

$$f(x) = \exp(\ln f(x)) = \exp(\lambda x + c) = \exp(\lambda x) \exp c$$

und wegen $f(0) = 1$ ist $c = 0$. Daher ist

$$f(x+y) = \exp(\lambda(x+y)) = \exp(\lambda x + \lambda y) = \exp(\lambda x) \cdot \exp(\lambda y) = f(x) \cdot f(y).$$

Aufgabe 10. Zeige anhand der Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto e^{iz},$$

dass der Mittelwertsatz für komplexwertige Funktionen nicht gelten muss. Man gebe also zwei Punkte $a, b \in \mathbb{C}$ an derart, dass die Gesamtsteigung $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ nicht als Ableitung eines Punktes auf der Verbindungsstrecke von $a$ nach $b$ auftritt.

Lösung

Wir wählen $a = 0$ und $b = 2\pi$. Dann ist

$$e^0 = e^{2\pi i} = 1$$

und somit ist die Gesamtsteigung

$$\frac{e^{2\pi i} - e^0}{2\pi} = 0.$$

Die Verbindungsstrecke besteht aus allen reellen Zahlen $r$ zwischen $0$ und $2\pi$. Für diese ist

$$\left(e^{ir}\right)' = ie^{ir}.$$

Dies ist nie 0, da beide Faktoren nie 0 sind.

Aufgabe 11. Es sei

$$f(x) = x^2 + x - \frac{7}{4}\,.$$

Zu jedem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir die reelle Folge

$$x_n = f^n(x_0)\,,$$

es gilt also die rekursive Beziehung $x_{n+1} = f(x_n)$. Zeige, dass die Folge für $x_0 \in [-2, 1]$ einen Häufungspunkt besitzt.

Lösung

Es ist

$$f(-2) \;=\; (-2)^2 - 2 - \frac{7}{4} \;=\; \frac{1}{4}$$

und

$$f(1) \;=\; 1^2 + 1 - \frac{7}{4} \;=\; \frac{1}{4}.$$

Die Ableitung der Funktion ist

$$f'(x) \;=\; 2x + 1,$$

daher wird das Minimum bei

$$x \;=\; -\frac{1}{2}$$

mit dem Wert

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) \;=\; \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{7}{4} \;=\; -2$$

angenommen. Daher ist

$$f([-2, 1]) \subseteq [-2, \frac{1}{4}] \subseteq [-2, 1]\,.$$

Bei $x_0 \in [-2, 1]$ sind demnach alle Folgenglieder $x_n \in [-2, 1]$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die Folge eine konvergente Teilfolge und damit einen Häufungspunkt.

Aufgabe 12. Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = \sin x$$

im Punkt $\pi/2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt $\pi/2$ an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Lösung

Wir müssen das Polynom

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{k!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^k$$

berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1, \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0, \\ f''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -1, \\ f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

und

$$f''''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Daher ist das vierte Taylor-Polynom (also die Taylor-Reihe bis zum Grad vier) gleich

$$1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 .$$

Aufgabe 13. Beweise die Substitutionsregel zur Integration von stetigen Funktionen (erste Version).

Lösung

Wegen der Stetigkeit von $f$ und der vorausgesetzten stetigen Differenzierbarkeit von $g$ existieren beide Integrale. Es sei $F$ eine Stammfunktion von $f$, die aufgrund von Korollar 24.5 existiert. Nach der Kettenregel hat die zusammengesetzte Funktion $t \mapsto F(g(t)) = (F \circ g)(t)$ die Ableitung $F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$. Daher gilt insgesamt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = (F \circ g)|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\,ds.$$

Aufgabe 14. Eine Person will ein einstündiges Sonnenbad nehmen. Die Intensität der Sonneneinstrahlung werde im Zeitintervall $[6, 22]$ (in Stunden) durch die Funktion

$$f\colon [6, 22] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t) = -t^3 + 27t^2 - 120t,$$

beschrieben. Bestimme den Startzeitpunkt des Sonnenbades, so dass die Gesamtsonnenausbeute maximal wird.

Lösung

Es sei $a \in [6,21]$ der Anfangszeitpunkt des Sonnenbades. Die Gesamteinstrahlung der Sonne in der Stunde $[a, a+1]$ ist das bestimmte Integral

$$\begin{aligned} & S(a) \\ = & \int_a^{a+1} (-t^3 + 27t^2 - 120t)\, dt \\ = & \left(-\frac{1}{4}t^4 + 9t^3 - 60t^2\right) |_a^{a+1} \\ = & \left(-\frac{1}{4}(a+1)^4 + 9(a+1)^3 - 60(a+1)^2\right) - \left(-\frac{1}{4}a^4 + 9a^3 - 60a^2\right) \\ = & -\frac{1}{4}(4a^3 + 6a^2 + 4a + 1) + 9(3a^2 + 3a + 1) - 60(2a+1) \\ = & -a^3 + \frac{51}{2}a^2 - 94a - \frac{205}{4}. \end{aligned}$$

Für diese Funktion muss das Maximum im Intervall $[6,21]$ bestimmt werden. Dafür berechnen wir die Ableitung, diese ist

$$S'(a) = \left(-a^3 + \frac{51}{2}a^2 - 94a - \frac{205}{4}\right)' = -3a^2 + 51a - 94.$$

Die Nullstellenberechnung dieser Ableitung führt auf $a^2 - 17a + \frac{94}{3} = 0$ bzw. auf

$$\left(a - \frac{17}{2}\right)^2 = -\frac{94}{3} + \left(\frac{17}{2}\right)^2 = -\frac{94}{3} + \frac{289}{4} = \frac{-376+867}{12} = \frac{491}{12}.$$

Also ist

$$a_0 = \sqrt{\frac{491}{12}} + \frac{17}{2} \cong 14,8966 \cong 14 \text{ Uhr } 54$$

(die negative Wurzel muss nicht berücksichtigt werden, da diese zu einem $a$ außerhalb des Definitionsbereiches führt). Die zweite Ableitung

$$S''(a) = -6a + 51$$

ist an der Stelle $a_0$ negativ, so dass dort das Maximum vorliegt. Da die Ableitung keine weiteren Nullstellen im Intervall besitzt, müssen die Randpunkte nicht gesondert betrachtet werden.

Aufgabe 15. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{x^5 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von $f$.

b) Bestimme eine Stammfunktion von $f$ für $x > 1$.

Lösung

a) Zunächst ist

$$(x-1)^2(x^2+1) \;=\; (x^2-2x+1)(x^2+1) \;=\; x^4-2x^3+2x^2-2x+1.$$

Polynomdivision des Zählers durch den Nenner ergibt

$$x^5+3x^3-2x^2+x-1 \;=\; (x+2)(x^4-2x^3+2x^2-2x+1)+5x^3-4x^2+4x-3.$$

Daher ist

$$\frac{x^5+3x^3-2x^2+x-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \;=\; x+2+\frac{5x^3-4x^2+4x-3}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}.$$

Für den rechten Bruch bestimmen wir die Partialbruchzerlegung über den Ansatz

$$\frac{5x^3-4x^2+4x-3}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \;=\; \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{(x^2+1)},$$

der wiederum auf

$$5x^3-4x^2+4x-3 \;=\; a(x-1)(x^2+1)+b(x^2+1)+(cx+d)(x-1)^2$$

führt.

Für $x=1$ ergibt sich

$$2 \;=\; 2b,$$

also $b=1$.

Für $x=0$ ergibt sich

$$-3 \;=\; -a+1+d,$$

also $4=a-d$.

Für $x=-1$ ergibt sich

$$-5-4-4-3 \;=\; -16 \;=\; -4a+2+4(-c+d),$$

also $\frac{18}{4}=a+c-d$.

Der Koeffizient zu $x^3$ führt schließlich auf

$$5 \;=\; a+c.$$

Die Subtraktion der dritten Gleichung von der zweiten führt auf

$$c \;=\; \frac{18}{4}-4 \;=\; \frac{1}{2}.$$

Aus der vierten Gleichung folgt daraus $a=\frac{9}{2}$ und aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$d \;=\; \frac{1}{2}.$$

Somit ergibt sich insgesamt die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^5+3x^3-2x^2+x-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \;=\; x+2+\frac{\frac{9}{2}}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{(x^2+1)}.$$

b) Eine Stammfunktion von $f$ ist

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}\ln(x-1) - (x-1)^{-1} + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x\,.$$

Aufgabe 16. Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung ( $y > 0$)

$$y' = t^2 y^3$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen. Was ist der Definitionsbereich der Lösungen?

Lösung

Wir schreiben $g(t) = t^2$ und $h(y) = y^3$. Eine Stammfunktion zu $\frac{1}{h(y)} = \frac{1}{y^3}$ ist $H(y) = -\frac{1}{2}y^{-2} = z$ ($z$ ist also negativ) mit der Umkehrfunktion

$$y = H^{-1}(z) = \sqrt{-\frac{1}{2}z^{-1}}\,.$$

Die Stammfunktionen zu $g(t) = t^2$ sind $\frac{1}{3}t^3 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Daher sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(t) = \sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3 + c\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{2\left(\frac{1}{3}t^3 + c\right)}} = \sqrt{\frac{-1}{\frac{2}{3}t^3 + 2c}}.$$

Bei gegebenem $c$ ist diese Wurzel genau dann definiert, wenn

$$\frac{2}{3}t^3 + 2c < 0$$

ist. Dies bedeutet

$$t < \sqrt[3]{-3c}\,.$$

Die Definitionsbereiche sind also

$$]-\infty, \sqrt[3]{-3c}[\,.$$

## Anhang

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem angeordneten Körper und es sei $x \in K$.

(1) Man sagt, dass die Folge gegen $x$ *hypervergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon.$$

(2) Man sagt, dass die Folge gegen $x$ *supervergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon \geq 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(3) Man sagt, dass die Folge gegen $x$ *megavergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ und jedes $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(4) Man sagt, dass die Folge gegen $x$ *pseudovergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(5) Man sagt, dass die Folge gegen $x$ *semivergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, und jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, derart, dass die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(6) Man sagt, dass die Folge gegen $x$ *protovergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Es gibt ein $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(7) Man sagt, dass die Folge gegen $x$ *quasivergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Es gibt ein $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(8) Man sagt, dass die Folge gegen $x$ *deuterovergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$x_n - x \leq \epsilon$$

gilt.