

Analysis I

2. Beispielklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Σ
mögliche Pkt.:	4	4	2	5	4	5	2	2	4	4	5	3	4	5	7	4	64
erhaltene Pkt.:																	

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

- (1) Die *Produktmenge* aus zwei Mengen L und M .
- (2) Die *Hintereinanderschaltung* der Abbildungen

$$F: L \longrightarrow M$$

und

$$G: M \longrightarrow N.$$

- (3) Eine *Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ von komplexen Zahlen a_k .
- (4) Ein *Häufungspunkt* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (5) Die *komplexe Exponentialfunktion*.
- (6) Das *Treppintegral* zu einer Treppenfunktion

$$t: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem Intervall $I = [a, b]$ zur Unterteilung $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ und den Werten $t_i, i = 1, \dots, n$.

- (7) Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

- (8) Die *gewöhnliche Differentialgleichung* zu einer Funktion

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

- (1) Die *allgemeine binomische Formel* für $(a + b)^n$.
- (2) Die *Konvergenzaussage* für die geometrische Reihe in $\mathbb{C}$.
- (3) Der *Identitätssatz für Potenzreihen*.
- (4) Die *Substitutionsregel* zur Integration von stetigen Funktionen (erste Version).

AUFGABE 3. (2 Punkte)

Berechne die Gaußklammer von $-\frac{133}{3}$.

AUFGABE 4. (5 Punkte)

Zeige mittels vollständiger Induktion für $n \geq 1$ die Formel

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{bei } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{bei } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

AUFGABE 5. (4 Punkte)

Betrachte die Folge $x_n = (-1)^n$ und $x = -1$. Welche der Pseudokonvergenzbegriffe (siehe Anhang) treffen zu?

Schreiben Sie ohne Begründung die zutreffenden Nummern auf. Punkte gibt es nur für vollständig richtige Antworten.

AUFGABE 6. (5 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

nur im Nullpunkt 0 stetig ist.

AUFGABE 7. (2 Punkte)

Zeige, dass eine konvergente Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = 0$ für alle geraden Indizes eine ungerade Funktion darstellt.

AUFGABE 8. (2 Punkte)

Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine bijektive differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und der Umkehrfunktion f^{-1} . Was ist an folgendem „Beweis“ für die Ableitung der Umkehrfunktion nicht korrekt?

Es ist

$$(f \circ f^{-1})(y) = y.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir durch beidseitiges Ableiten die Gleichung

$$(f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = 1.$$

Also ist

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

AUFGABE 9. (4 Punkte)

Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto f(x),$$

eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 1$ und mit $f'(x) = \lambda f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass f die Funktionalgleichung

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt.

AUFGABE 10. (4 Punkte)

Zeige anhand der Funktion

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto e^{iz},$$

dass der Mittelwertsatz für komplexwertige Funktionen nicht gelten muss. Man gebe also zwei Punkte $a, b \in \mathbb{C}$ an derart, dass die Gesamtsteigung $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ nicht als Ableitung eines Punktes auf der Verbindungsstrecke von a nach b auftritt.

AUFGABE 11. (5 Punkte)

Es sei

$$f(x) = x^2 + x - \frac{7}{4}.$$

Zu jedem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir die reelle Folge

$$x_n = f^n(x_0),$$

es gilt also die rekursive Beziehung $x_{n+1} = f(x_n)$. Zeige, dass die Folge für $x_0 \in [-2, 1]$ einen Häufungspunkt besitzt.

AUFGABE 12. (3 Punkte)

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = \sin x$$

im Punkt $\pi/2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt $\pi/2$ an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

AUFGABE 13. (4 Punkte)

Beweise die Substitutionsregel zur Integration von stetigen Funktionen (erste Version).

AUFGABE 14. (5 Punkte)

Eine Person will ein einstündiges Sonnenbad nehmen. Die Intensität der Sonneneinstrahlung werde im Zeitintervall $[6, 22]$ (in Stunden) durch die Funktion

$$f: [6, 22] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(t) = -t^3 + 27t^2 - 120t,$$

beschrieben. Bestimme den Startzeitpunkt des Sonnenbades, so dass die Gesamtsonnenausbeute maximal wird.

AUFGABE 15. (7 (5+2) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{x^5 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

- a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von f .
- b) Bestimme eine Stammfunktion von f für $x > 1$.

AUFGABE 16. (4 Punkte)

Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung ($y > 0$)

$$y' = t^2 y^3$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen. Was ist der Definitionsbereich der Lösungen?

Anhang

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem angeordneten Körper und es sei $x \in K$.

- (1) Man sagt, dass die Folge gegen x *hypervergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon.$$

- (2) Man sagt, dass die Folge gegen x *supervergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon \geq 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

- (3) Man sagt, dass die Folge gegen x *megavergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ und jedes $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

- (4) Man sagt, dass die Folge gegen x *pseudovergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

- (5) Man sagt, dass die Folge gegen x *semivergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, und jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, derart, dass die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

- (6) Man sagt, dass die Folge gegen x *protovergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Es gibt ein $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

- (7) Man sagt, dass die Folge gegen x *quasivergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Es gibt ein $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

- (8) Man sagt, dass die Folge gegen x *deutervergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$x_n - x \leq \epsilon$$

gilt.