Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

1. Beispielklausur mit Lösungen

AUFGABE 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Das *Bild* einer Abbildung
$$F\colon L \longrightarrow M.$$
(2) Eine *Cauchy-Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K.
(3) Die *Gaußklammer* $\lfloor x \rfloor$ zu einem Element $x \in K$ in einem archimedisch angeordneten Körper K.
(4) Die *Gleichmächtigkeit* von zwei Mengen L und M.
(5) Die *Stetigkeit in einem Punkt* $a \in \mathbb{K}$ einer Abbildung $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.
(6) Die *Differenzierbarkeit in einem Punkt* $a \in \mathbb{K}$ einer Abbildung $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.
(7) Eine *Stammfunktion* einer Abbildung $f : D \to \mathbb{K}$ auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{K}$.
(8) Die *Lösung* zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung
$$y' = f(t, y)\,,$$
wobei
$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$
eine Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ist.

Lösung

(1) Das Bild von F ist die Menge
$$\{y \in M \mid \text{es gibt ein } x \in L \text{ mit } F(x) = y\}\ .$$
(2) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K heißt Cauchy-Folge, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:
Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung
$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$
gilt.
(3) Die Gaußklammer $\lfloor x \rfloor$ ist die größte ganze Zahl $n \leq x$.

(4) Die Mengen L und M heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung
$$f\colon L \longrightarrow M$$
gibt.

(5) Man sagt, dass f stetig im Punkt a ist, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, dass für alle x mit $|a - x| \leq \delta$ die Abschätzung $|f(a) - f(x)| \leq \epsilon$ gilt.

(6) Man sagt, dass f differenzierbar in a ist, wenn der Limes
$$\lim_{x \in D \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
existiert.

(7) Eine Funktion
$$F\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$
heißt Stammfunktion zu f, wenn F auf D differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

(8) Unter einer Lösung der Differentialgleichung versteht man eine Funktion
$$y\colon I \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto y(t),$$
auf einem mehrpunktigen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, die folgende Eigenschaften erfüllt.
  (a) Es ist $(t, y(t)) \in U$ für alle $t \in I$.
  (b) Die Funktion y ist differenzierbar.
  (c) Es ist $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$.

AUFGABE 2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Das *Leibnizkriterium für alternierende Reihen*.

(2) Das *Folgenkriterium* für die Stetigkeit einer Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.

(3) Das *Additionstheorem* für den Sinus.

(4) Der *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* für eine stetige Funktion
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Lösung

(1) Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine fallende Nullfolge von nichtnegativen reellen Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x_k$.

(2) Die Stetigkeit von f im Punkt a ist äquivalent dazu, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert, die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ konvergiert.

(3) Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sin(z+w) = \sin z \ \cos w + \cos z \ \sin w \, .$$

(4) Für einen beliebigen Punkt $a \in I$ ist die Integralfunktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = f(x)$$

für alle $x \in I$.

Aufgabe 3. Es seien x, y reelle Zahlen. Zeige, dass

$$x - \lfloor x \rfloor = y - \lfloor y \rfloor$$

genau dann gilt, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $y = x + n$ gibt.

Lösung

Es sei $x - \lfloor x \rfloor = y - \lfloor y \rfloor$. Da $\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor$ ganze Zahlen sind, ist $n = \lfloor y \rfloor - \lfloor x \rfloor$ ganzzahlig. Damit gilt

$$\begin{aligned} y &= \lfloor y \rfloor + (y - \lfloor y \rfloor) \\ &= \lfloor y \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor) \\ &= x + \lfloor y \rfloor - \lfloor x \rfloor \\ &= x + n. \end{aligned}$$

Sei nun $y = x + n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Aus der definierenden Beziehung

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

folgt

$$\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1,$$

daher muss

$$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

sein. Somit ist

$$\begin{aligned} y - \lfloor y \rfloor &= x + n - \lfloor x + n \rfloor \\ &= x + n - (\lfloor x \rfloor + n) \\ &= x - \lfloor x \rfloor. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Entscheide, ob die reelle Folge

$$x_n = \frac{5n^{\frac{3}{2}} + 4n^{\frac{4}{3}} + n}{7n^{\frac{5}{3}} + 6n^{\frac{3}{2}}}$$

(mit $n \geq 1$) in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Wir erweitern mit $n^{-\frac{5}{3}}$ und erhalten

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{5n^{\frac{3}{2}} + 4n^{\frac{4}{3}} + n}{7n^{\frac{5}{3}} + 6n^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{5n^{\frac{3}{2}-\frac{5}{3}} + 4n^{\frac{4}{3}-\frac{5}{3}} + n^{1-\frac{5}{3}}}{7n^{\frac{5}{3}-\frac{5}{3}} + 6n^{\frac{3}{2}-\frac{5}{3}}} \\ &= \frac{5n^{-\frac{1}{6}} + 4n^{-\frac{1}{3}} + n^{-\frac{2}{3}}}{7 + 6n^{-\frac{1}{6}}}. \end{aligned}$$

Folgen der Form n^{-q}, $q \in \mathbb{Q}_+$, konvergieren gegen 0, nach den Rechengesetzen für konvergente Folgen konvergiert diese Folge also gegen 0.

Aufgabe 5. Beweise das Folgenkriterium für die Stetigkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

Lösung

Es bezeichne (1) die Stetigkeit von f im Punkt x und (2) die Eigenschaft, dass für jede gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Wir müssen die Äquivalenz von (1) und (2) zeigen.

Sei (1) erfüllt und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen x konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$ ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen (1) gibt es ein δ mit der angegebenen Eigenschaft und wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$d(x_n, x) \leq \delta\,.$$

Nach der Wahl von δ ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0\,,$$

so dass die Bildfolge gegen $f(x)$ konvergiert. Sei (2) erfüllt. Wir nehmen an, dass f nicht stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für alle $\delta > 0$ Elemente $z \in \mathbb{R}$ gibt, deren Abstand zu x maximal gleich δ ist, deren Wert $f(z)$ unter der Abbildung aber zu $f(x)$ einen Abstand besitzt, der größer als ϵ ist. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. D.h. für jede natürliche Zahl gibt es ein $x_n \in \mathbb{R}$ mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon\,.$$

Diese so konstruierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen $f(x)$, da der Abstand der Bildfolgenglieder zu $f(x)$ zumindest ϵ ist. Dies ist ein Widerspruch zu (2).

Aufgabe 6. Zeige, dass es stetige Funktionen

$$f, g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R},$$

mit $fg = 0$ derart gibt, dass für alle $\delta > 0$ weder $f|_{[0,\delta]}$ noch $g|_{[0,\delta]}$ die Nullfunktion ist.

Lösung

Wir betrachten die Zerlegung von $\mathbb{R}_+$ in die unendlich vielen halboffenen Intervalle $I_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ für $n \in \mathbb{N}_+$ und $I_0 = [1, +\infty]$. Auf I_n, $n \in \mathbb{N}_+$, definieren wir die stetige Funktion φ_n durch

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= -\left(x - \frac{1}{n+1}\right)\left(x - \frac{1}{n}\right) \\ &= -x^2 + \frac{2n+1}{(n+1)n}x - \frac{1}{(n+1)n}. \end{aligned}$$

Diese Funktion hat an den Intervallgrenzen den Wert 0. Die Ableitung ist

$$-2x + \frac{2n+1}{(n+1)n},$$

das Maximum liegt also im arithmetischen Mittel der Intervallgrenzen vor und besitzt den Wert

$$\begin{aligned} \varphi_n\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{(n+1)n}\right) &= -\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{(n+1)n} - \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{(n+1)n} - \frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{\frac{1}{2}}{(n+1)n} \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{(n+1)n} \\ &\leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Funktionen definieren wir

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ falls } x = 0\,, \\ 0, \text{ falls } x \in I_n, n \text{ ungerade}\,, \\ \varphi_n(x), \text{ falls } x \in I_n, n \text{ gerade}, \, n \geq 2, \\ 0, \text{ falls } x \geq 1\,, \end{cases}$$

und

$$g(x) = \begin{cases} 0, \text{ falls } x = 0\,, \\ \varphi_n(x), \text{ falls } x \in I_n, n \text{ ungerade}\,, \\ 0, \text{ falls } x \in I_n, n \text{ gerade}, \, n \geq 2, \\ 0, \text{ falls } x \geq 1\,. \end{cases}$$

Diese Funktionen sind stetig: Dies ist im Innern der Intervalle klar; an den Intervallgrenzen liegt stets der Wert 0 vor; für den Nullpunkt ergibt sich die Stetigkeit, da die Funktionen auf $[0, \frac{1}{n}]$ durch $\frac{1}{n}$ beschränkt sind. Offenbar ist $fg = 0$ und für jedes $\delta > 0$ sind weder $f|_{[0,\delta]}$ noch $g|_{[0,\delta]}$ die Nullfunktion.

Aufgabe 7. Wir betrachten das Polynom

$$f(x) = x^4 - x^3 + 5x + 2 \in \mathbb{C}[X]\,.$$

Bestimme die x-Koordinaten sämtlicher Schnittpunkte der Tangente an f im Punkt $x = 1$ mit dem Graphen von f.

Lösung

Es ist

$$f(1) \,=\, 1 - 1 + 5 + 2 \,=\, 7$$

und

$$f'(1) \,=\, 4 - 3 + 5 \,=\, 6.$$

Die Tangente ist also der Graph der Funktion $t(x) = 6x + 1$. Wir müssen sämtliche Punkte $x \in \mathbb{C}$ mit $f(x) = t(x)$ bestimmen, wobei der Punkt $x_1 = 1$ dazugehört. Dazu betrachten wir

$$f(x) - t(x) \,=\, x^4 - x^3 + 5x + 2 - 6x - 1 \,=\, x^4 - x^3 - x + 1.$$

Polynomdivision durch $(x-1)^2$ ergibt

$$x^4 - x^3 - x + 1 \,=\, (x-1)^2(x^2 + x + 1).$$

Die Nullstellen von $x^2 + x + 1$ sind

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \text{ und } x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\,.$$

Aufgabe 8. Wir betrachten die durch

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

definierte Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Zeige, dass es zu jedem λ, $-1 \leq \lambda \leq 1$, eine Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+$ derart gibt, dass die Folge der Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n}$$

gegen λ konvergiert.

Lösung

Zu jedem $\lambda \in [-1, 1]$ gibt es ein $u \in]0, 2\pi]$ mit $\sin u = \lambda$. Wir setzen

$$x_n := \frac{1}{u + 2\pi n}\,.$$

Dies ist offenbar eine Nullfolge in $\mathbb{R}_+$. Die zugehörigen Differenzenquotienten sind

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{x_n} &= \frac{x_n \sin \frac{1}{x_n}}{x_n} \\ &= \sin \frac{1}{x_n} \\ &= \sin (u + 2\pi n) \\ &= \sin u \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Also ist die Folge dieser Differenzenquotienten konstant gleich λ.

Aufgabe 9. Bestimme für die Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

die Extrema.

Lösung

Wir schreiben

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^x + 2^{-x} \\ &= e^{x \ln 2} + e^{-x \ln 2}. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Extrema betrachten wir die Ableitung, diese ist

$$f'(x) = (\ln 2)e^{x \ln 2} - (\ln 2)e^{-x \ln 2}.$$

Die Bedingung $f'(x) = 0$ führt durch Multiplikation mit $e^{x \ln 2}$ und Division durch $\ln 2$ (die beide nicht 0 sind) auf

$$0 = e^{2x \ln 2} - 1.$$

Daher muss

$$e^{2x \ln 2} = 1$$

sein, woraus sich

$$2x \ln 2 = 0,$$

also $x = 0$ ergibt. Die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = (\ln 2)\left((\ln 2)e^{x \ln 2} + (\ln 2)e^{-x \ln 2}\right)$$

und somit positiv, also liegt im Nullpunkt ein isoliertes lokales Minimum vor. Da die Ableitung keine weitere Nullstelle hat, ist dieses Minimum das einzige Minimum und daher ein globales Minimum und es gibt keine Maxima.

Aufgabe 10. Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Lösung

Die erste Ableitung ist

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, \text{ also } f'(2) = -\frac{1}{4}\,.$$

Die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = 2x^{-3}, \text{ also } f''(2) = \frac{1}{4}\,.$$

Die dritte Ableitung ist

$$f'''(x) = -6x^{-4}, \text{ also } f'''(2) = -\frac{3}{8}\,.$$

Die vierte Ableitung ist

$$f''''(x) = 24x^{-5}, \text{ also } f''''(2) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}\,.$$

Das Taylor-Polynom vom Grad 4 ist demnach

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{4\cdot 2}(x-2)^2 - \frac{3}{8\cdot 3!}(x-2)^3 + \frac{3}{4\cdot 4!}(x-2)^4$$

bzw.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{32}(x-2)^4\,.$$

Aufgabe 11. Die beiden lokalen Extrema der Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

definieren ein achsenparalleles Rechteck, das vom Funktionsgraphen in zwei Bereiche zerlegt wird. Bestimme deren Flächeninhalte.

Lösung

Es ist

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3((x-2)^2 - 1) = 3(x-1)(x-3).$$

Die Ableitung hat also bei $x = 1$ und bei $x = 3$ eine Nullstelle. Wegen $f''(x) = 6x - 12$ liegt bei $x = 1$ ein lokales Maximum mit dem Wert $f(1) = 5$ und bei $x = 3$ ein lokales Minimum mit dem Wert $f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$ vor. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist 8. Der Flächeninhalt des Teilbereichs des Rechteckes unterhalb des Graphen ist

$$\begin{aligned}
\int_1^3 x^3 - 6x^2 + 9x + 1dx - 2 &= [\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 + x]_1^3 - 2 \\
&= \frac{1}{4}81 - 2\cdot 27 + \frac{81}{2} + 3 - \frac{1}{4} + 2 - \frac{9}{2} - 1 - 2 \\
&= \frac{3}{4}81 - 54 + 3 - \frac{19}{4} + 1 - 2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{243-19}{4} - 50 - 2 \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

Der Flächeninhalt des Teilbereichs des Rechteckes oberhalb des Graphen ist ebenfalls 4.

Aufgabe 12. Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 2x^3 + 3e^x - \sin x\,,$$

über $[-1, 0]$.

Lösung

Eine Stammfunktion ist

$$\frac{1}{2}x^4 + 3e^x + \cos x\ .$$

Daher ist das bestimmte Integral gleich

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} f(x)\,dx &= \left(\frac{1}{2}x^4 + 3e^x + \cos x\right)|_{-1}^{0} \\
&= (0+3+1) - \left(\frac{1}{2}(-1)^4 + 3e^{-1} + \cos(-1)\right) \\
&= \frac{7}{2} - 3e^{-1} - \cos(-1)\,.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 13. a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{4s}{s^4 - 2s^2 + 1}\,.$$

b) Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{4s}{s^4 - 2s^2 + 1}\,.$$

c) Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{\sinh^2 t}\,.$$

Lösung

Es ist

$$\frac{4s}{s^4 - 2s^2 + 1} = \frac{4s}{(s^2-1)^2} = \frac{4s}{(s-1)^2(s+1)^2}.$$

Damit liegt die Faktorzerlegung des Nenners vor, so dass die Partialbruchzerlegung die Gestalt

$$\frac{4s}{(s-1)^2(s+1)^2} = \frac{a}{(s-1)} + \frac{b}{(s-1)^2} + \frac{c}{(s+1)} + \frac{d}{(s+1)^2}$$

mit reellen Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ besitzt. Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt

$$4s \;=\; a(s-1)(s+1)^2 + b(s+1)^2 + c(s+1)(s-1)^2 + d(s-1)^2.$$

Einsetzen von $s = 1$ ergibt $4 = 4b$, also $b = 1$.

Einsetzen von $s = -1$ ergibt $-4 = 4d$, also $d = -1$.

Einsetzen von $s = 0$ ergibt $0 = -a+b+c+d$, also ist $-a+c = 0$, also $a = c$.

Einsetzen von $s = 2$ ergibt

$$8 \;=\; 9a + 9b + 3c + d \;=\; 9a + 9 + 3c - 1.$$

Also ist $9a + 3c = 0$ und daher $a = c = 0$. Die Partialbruchzerlegung ist also

$$\frac{4s}{(s-1)^2(s+1)^2} \;=\; \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2}.$$

b) Eine Stammfunktion von

$$\frac{4s}{(s-1)^2(s+1)^2} \;=\; \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

ist

$$-(s-1)^{-1} + (s+1)^{-1}.$$

c) Es ist

$$\frac{1}{\sinh^2 t} \;=\; \frac{4}{(e^t - e^{-t})^2} \;=\; \frac{4}{(e^t)^2 - 2 + (e^t)^{-2}}.$$

Wir wenden die Standardsubstitution $t = \ln s$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sinh^2 t} dt \;&=\; \int \frac{4}{(e^t)^2 - 2 + (e^t)^{-2}} dt \\
&=\; \int \frac{4}{s^2 - 2 + s^{-2}} \cdot \frac{1}{s} ds \\
&=\; \int \frac{4s}{s^4 - 2s^2 + 1} ds.
\end{aligned}$$

Nach Teil b) ist

$$-(e^t - 1)^{-1} + (e^t + 1)^{-1}$$

eine Stammfunktion von $\frac{1}{\sinh^2 t}$.

Aufgabe 14. a) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{t^3}{y^2},\; y > 0,\; t > 0\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

b) Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{t^3}{y^2} \text{ mit } y(1) = 1\,.$$

Lösung

a) Wir setzen $g(t) = t^3$ und $h(y) = \frac{1}{y^2}$. Eine Stammfunktion von $g(t)$ ist $G(t) = \frac{1}{4}t^4$ und eine Stammfunktion von $\frac{1}{h(y)} = y^2$ ist $H(y) = \frac{1}{3}y^3$. Die Umkehrfunktion von H ist

$$H^{-1}(z) = \sqrt[3]{3z}\,.$$

Daher ist

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}t^4} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}t^{4/3}$$

eine Lösung der Differentialgleichung.

b) Wir machen den Ansatz $H(y) = \frac{1}{3}y^3 + c$ mit der Umkehrfunktion

$$H^{-1}(z) = \sqrt[3]{3z - 3c}\,,$$

was zur Lösung(sschar) $y(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}t^4 - 3c}$ führt. Aus

$$1 \;=\; y(1) \;=\; \sqrt[3]{\frac{3}{4}1 - 3c}$$

folgt $c = -\frac{1}{12}$. Also ist

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{4}}$$

die Lösung des Anfangswertproblems.