Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

30. Mai 2015

Analysis I

Nachklausur mit Lösungen

AUFGABE 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Der *Betrag* eines Elementes x in einem angeordneten Körper K.
(2) Der *Grad* eines Polynoms $P \in K[X]$, $P \neq 0$, über einem Körper K.
(3) Die Funktion
$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$
($D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge) *nimmt* in einem Punkt $x \in D$ ein *lokales Maximum an*.
(4) Die Zahl π (gefragt ist nach der analytischen Definition).
(5) Die *Potenzreihe* in $z \in \mathbb{C}$ zu den Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.
(6) Die *Zeitunabhängigkeit* einer gewöhnlichen Differentialgleichung
$$y' = f(t, y)\,.$$

Lösung

(1) Der *Betrag* von x ist folgendermaßen definiert.
$$|x| = \begin{cases} x \text{ falls } x \geq 0 \\ -x \text{ falls } x < 0\,. \end{cases}$$
(2) Der Grad eines von 0 verschiedenen Polynoms
$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$
mit $a_n \neq 0$ ist n.
(3) Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in D$ ein lokales Maximum besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt derart, dass für alle $x' \in D$ mit $|x - x'| \leq \epsilon$ die Abschätzung
$$f(x) \geq f(x')$$
gilt.
(4) Es sei s die eindeutig bestimmte reelle Nullstelle der Kosinusfunktion auf dem Intervall $[0, 2]$. Die *Kreiszahl* π ist definiert durch
$$\pi := 2s\,.$$
(5) Die Potenzreihe in z ist die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\,.$$
(6) Die gewöhnliche Differentialgleichung
$$y' = f(t, y)$$
heißt zeitunabhängig, wenn die Funktion f nicht von t abhängt, wenn also $f(t, y) = h(y)$ gilt mit einer Funktion h in der einen Variablen y.

Aufgabe 2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Satz über beschränkte Teilmengen* von $\mathbb{R}$.
(2) Die *Funktionalgleichung* der komplexen Exponentialfunktion.
(3) Der Satz über *partielle Integration*.

Lösung

(1) Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.
(2) Für komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt
$$\exp(z+w) \, = \, \exp z \cdot \exp w.$$
(3) Es seien
$$f, g \colon \, [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt
$$\int_a^b f(t) g'(t) \, dt = fg|_a^b - \int_a^b f'(t) g(t) \, dt \, .$$

Aufgabe 3. Bei einer Fernsehaufzeichnung sitzen n Zuschauer im Studio, die über ein elektronisches Gerät auf verschiedene Fragen mit Ja oder Nein antworten und wobei das Ergebnis (die Ja-Antworten) in vollen Prozent auf einem Bildschirm erscheint und wobei ab ,5 nach oben gerundet wird.

a) Erstelle eine Formel mit Hilfe der Gaußklammer $\lfloor \ \rfloor$, die bei gegebenem n aus i die Prozentzahl $p(i)$ berechnet.

b) Für welche n ist die Prozentabbildung aus a) injektiv und für welche surjektiv?

c) Es sei $n = 99$. Welche Prozentzahl tritt nie auf dem Bildschirm auf?

d) Es sei $n = 101$. Hinter welcher Prozentzahl können sich unterschiedlich viele Ja-Stimmen verbergen?

e) Es sei $n = 102$. Hinter welchen Prozentzahlen können sich unterschiedlich viele Ja-Stimmen verbergen?

Lösung

a) Die ganze Prozentzahl wird bei i Ja-Antworten von n Zuschauern bei der angegebenen Rundung durch

$$p(i) \;=\; \left\lfloor 100 \cdot \frac{i}{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

berechnet.

b) Für $n \leq 99$ ist die Abbildung aus Anzahlgründen nicht surjektiv. Sie ist injektiv, da der ungerundete Prozentwert einer Person größer als 1 ist und daher die Hinzunahme einer Person die gerundete Prozentanzahl um mindestens 1 erhöht. Für $n = 100$ ist die Abbildung die Identität, also injektiv und surjektiv. Für $n \geq 101$ ist die Abbildung aus Anzahlgründen nicht injektiv. Sie ist surjektiv, da der ungerundete Prozentwert einer Person weniger als 1 ist daher die Hinzunahme einer Person die gerundete Prozentanzahl um höchstens 1 erhöht.

c) Die Prozentzahl 50 kommt nicht vor. Für $i = 49$ ist das Ergebnis

$$\left\lfloor 100 \cdot \frac{49}{99} + \frac{1}{2} \right\rfloor \;=\; \left\lfloor \frac{9800 + 99}{198} \right\rfloor \;=\; \left\lfloor \frac{9899}{198} \right\rfloor \;=\; 49$$

(wegen $198 \cdot 50 \;=\; 9900$) und für $i = 50$ ist das Ergebnis

$$\left\lfloor 100 \cdot \frac{50}{99} + \frac{1}{2} \right\rfloor \;=\; \left\lfloor \frac{10000 + 99}{198} \right\rfloor \;=\; \left\lfloor \frac{10099}{198} \right\rfloor \;=\; 51$$

(wegen $198 \cdot 51 \;=\; 10098$).

d) Die Prozentzahl 50 kommt doppelt vor. Für $i = 50$ ist das Ergebnis

$$\left\lfloor 100 \cdot \frac{50}{101} + \frac{1}{2} \right\rfloor \;=\; \left\lfloor \frac{10000 + 101}{202} \right\rfloor \;=\; \left\lfloor \frac{10101}{202} \right\rfloor \;=\; 50$$

(wegen $202 \cdot 50 = 10100$) und für $i = 51$ ist das Ergebnis

$$\left\lfloor 100 \cdot \frac{51}{101} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10200 + 101}{202} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10301}{202} \right\rfloor = 50$$

(wegen $202 \cdot 51 = 10302$).

e) Die Prozentzahl 25 kommt doppelt vor. Für $i = 25$ ist das Ergebnis

$$\left\lfloor 100 \cdot \frac{25}{102} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2500 + 51}{102} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2551}{102} \right\rfloor = 25$$

(wegen $102 \cdot 25 = 2550$) und für $i = 26$ ist das Ergebnis ebenfalls

$$\left\lfloor 100 \cdot \frac{26}{102} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2600 + 51}{102} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2651}{102} \right\rfloor = 25$$

(wegen $102 \cdot 26 = 2652$). Wegen der Symmetrie der Situation kommt auch die Prozentzahl 75 doppelt vor, für $i = 76, 77$.

Aufgabe 4. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in K. Zeige, dass die Produktfolge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent ist mit

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right).$$

Lösung

Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Lemma 5.8 insbesondere beschränkt und daher existiert ein $D > 0$ mit $|x_n| \leq D$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y := \lim_{n\to\infty} y_n$. Wir setzen $C = \max\{D, |y|\}$. Aufgrund der Konvergenz gibt es natürliche Zahlen N_1 und N_2 mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_1 \text{ und } |y_n - y| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_2\,.$$

Diese Abschätzungen gelten dann auch für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$. Für diese Zahlen gilt daher

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &= |x_n|\,|y_n - y| + |y|\,|x_n - x| \\ &\leq C\frac{\epsilon}{2C} + C\frac{\epsilon}{2C} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Aufgabe 5. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom und $a \in K$. Zeige, dass a genau dann eine Nullstelle von P ist, wenn P ein Vielfaches des linearen Polynoms $X - a$ ist.

Lösung

Wenn P ein Vielfaches von $X - a$ ist, so kann man

$$P = (X - a)Q$$

mit einem weiteren Polynom Q schreiben. Einsetzen ergibt

$$P(a) = (a - a)Q(a) = 0\,.$$

Im Allgemeinen gibt es aufgrund der Division mit Rest eine Darstellung

$$P = (X - a)Q + R\,,$$

wobei $R = 0$ oder aber den Grad null besitzt, also eine Konstante ist. Einsetzen ergibt

$$P(a) = R\,.$$

Wenn also $P(a) = 0$ ist, so muss der Rest $R = 0$ sein, und das bedeutet, dass $P = (X - a)Q$ ist.

Aufgabe 6. Es seien

$$f, g\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f(b) \leq g(b)$. Zeige, dass es einen Punkt $c \in [a, b]$ mit $f(c) = g(c)$ gibt.

Lösung

Wir betrachten

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Diese Funktion ist nach Lemma 12.6 wieder stetig und es ist

$$h(a) = f(a) - g(a) \geq 0$$

und

$$h(b) = f(b) - g(b) \leq 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $c \in [a, b]$ mit

$$h(c) = 0 = f(c) - g(c),$$

also ist

$$f(c) = g(c).$$

Aufgabe 7. Beweise die Funktionalgleichung für die komplexe Exponentialfunktion.

Lösung

Das Cauchy-Produkt der beiden Exponentialreihen ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{z^i}{i!} \frac{w^{n-i}}{(n-i)!}$. Diese Reihe ist nach Lemma 15.2 absolut konvergent und der Grenzwert ist das Produkt der beiden Grenzwerte. Andererseits ist der n-te Summand der Exponentialreihe von $z + w$ nach der allgemeinen binomischen Formel gleich

$$\frac{(z+w)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i w^{n-i} = c_n,$$

so dass die beiden Seiten übereinstimmen.

AUFGABE 8. Untersuche die Funktionenfolge

$$\mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f_n(x),$$

mit

$$f_n(x) \,=\, x^{\frac{n}{n+1}}$$

auf

a) punktweise Konvergenz und auf

b) gleichmäßige Konvergenz.

Lösung

Es ist

$$x^{\frac{n}{n+1}} \,=\, e^{\frac{n}{n+1}\,\ln x}.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}_{>0}$ konvergiert die Folge $\frac{n}{n+1}$ ln x gegen ln x, da ja

$$\frac{n}{n+1} \,=\, \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

gegen 1 konvergiert. Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion konvergiert somit die Ausgangsfolge $x^{\frac{n}{n+1}}$ gegen x. Es liegt also punktweise Konvergenz mit der Identität als Grenzfunktion vor.

b) Es liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor. Beispielsweise gibt es zu $\epsilon \,=\, 1$ kein n_0 mit

$$|f_n(x) - x| \,\leq\, 1$$

für alle x und alle $n \,\geq\, n_0$ Zu n kann man nämlich $x = 2^{n+1}$ betrachten und erhält

$$\begin{aligned} \left|f_n(2^{n+1}) - 2^{n+1}\right| &= \left|\left(2^{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}} - 2^{n+1}\right| \\ &= \left|2^n - 2^{n+1}\right| \\ &= 2^n \\ &> 1 \end{aligned}$$

(für den letzten Schritt sei $n \geq 1$).

Aufgabe 9. a) Man gebe ein quadratisches Polynom an, dessen Graph die Diagonale und die Gegendiagonale bei $y = 1$ jeweils tangential schneidet.

b) Man zeige, dass der Graph des Lösungspolynoms aus Teil a) innerhalb des oberen, durch die Diagonale und die Gegendiagonale begrenzten Viertels der Ebene liegt.

Lösung

a) Das gesuchte Polynom sei

$$f(x) \;=\; ax^2 + bx + c.$$

Dann ist

$$f'(x) \;=\; 2ax + b.$$

Die Bedingung, dass der Graph zu f die Diagonale und die Gegendiagonale bei $y = 1$ schneidet, bedeutet

$$a + b + c = 1 \text{ und } a - b + c = 1\,.$$

Die Steigung der Diagonale ist 1. Da der Schnitt tangential sein soll, bedeutet dies

$$2a + b \;=\; 1.$$

Die Steigung der Gegendiagonale ist -1. Dies bedeutet somit

$$-2a + b \;=\; -1.$$

Die Summe der beiden letzten Gleichungen ergibt direkt

$$b \;=\; 0$$

und somit

$$a \;=\; \frac{1}{2}.$$

Daraus ergibt sich mit der ersten (oder der zweiten) Gleichung

$$c \;=\; \frac{1}{2}.$$

Das gesuchte Polynom ist also

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}.$$

b) Für $x \geq 0$ ist zu zeigen, dass $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \geq x$ und für $x \leq 0$ ist zu zeigen, dass $P(x) \geq -x$ ist. Im ersten Fall ist

$$P(x) - x \;=\; \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - x \;=\; \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x + 1\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(x-1\right)^2 \;\geq\; 0$$

und im zweiten Fall ist

$$P(x) - x \;=\; \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} + x \;=\; \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x + 1\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(x+1\right)^2 \;\geq\; 0.$$

Aufgabe 10. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

im Reellen.

a) Bestimme den Definitionsbereich von f.

b) Skizziere f für x zwischen -2π und 2π.

c) Bestimme die ersten drei Ableitungen von f.

d) Bestimme das Taylor-Polynom der Ordnung 3 von f im Punkt $\frac{\pi}{2}$.

Lösung

a) Es ist

$$\sin x = 0$$

genau dann, wenn x ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Der Definitionsbereich ist also $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$.

b)

c) Nach der Quotientenregel ist

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}.$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\sin^3 x + 2 \sin x \cos^2 x}{\sin^4 x} \\ &= \frac{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}{\sin^3 x} \\ &= \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^3 x} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{2 \cos x \sin x \sin^3 x - 3(1 + \cos^2 x) \sin^2 x \cos x}{\sin^6 x} \\ &= \cos x \frac{2 \sin^2 x - 3(1 + \cos^2 x)}{\sin^4 x} \\ &= \cos x \frac{-1 - 5 \cos^2 x}{\sin^4 x} \end{aligned}$$

d) Wegen $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ und $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ist

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) \;=\; 1,$$

und

$$f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) \;=\; 0,$$

daher ist das Taylor-Polynom der Ordnung 3 gleich

$$1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \;.$$

Aufgabe 11. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine periodische Funktion mit der Periode $L > 0$.

a) Es sei f differenzierbar. Zeige, dass die Ableitung f' ebenfalls periodisch mit der Periode L ist.

b) Man gebe ein Beispiel einer nichtkonstanten, periodischen, stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Stammfunktion nicht periodisch ist.

Lösung

a) Es ist

$$f'(x+L) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+L+h) - f(x+L)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

daher ist die Ableitung periodisch mit Periodenlänge L.

b) Wir betrachten

$$f(x) = 2 + \sin x > 0.$$

Diese Funktion ist periodisch mit der Periodenlänge 2π. Die Stammfunktion ist nach Satz 19.5 streng wachsend, also nicht periodisch.

Aufgabe 12. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{e^{3x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Lösung

Wir führen die Substitution $x = \ln t$ durch und müssen dann für

$$g(t) = \frac{t^3}{t - t^{-1}} \cdot \frac{1}{t} = \frac{t^3}{t^2 - 1}$$

eine Stammfunktion finden ($t > 1$). Division mit Rest ergibt

$$t^3 = (t^2 - 1)t + t.$$

Die Partialbruchzerlegung für

$$\frac{t}{t^2 - 1}$$

führt auf

$$\frac{t}{t^2 - 1} = \frac{a}{t - 1} + \frac{b}{t + 1}$$

und auf

$$t = a(t + 1) + b(t - 1) = (a + b)t + a - b.$$

Also ist

$$a = b = \frac{1}{2}.$$

Daher ist

$$g(t) = t + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t - 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t + 1}.$$

Eine Stammfunktion davon ist

$$\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\ln\ (t - 1) + \frac{1}{2}\ln\ (t + 1)\ .$$

Rüchsubstitution ergibt für $f(x)$ die Stammfunktion

$$\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}\ln\ (e^x - 1) + \frac{1}{2}\ln\ (e^x + 1)\ .$$

AUFGABE 13. Es sei

$$y' = h(y)$$

eine zeitunabhängige Differentialgleichung mit einer unendlich oft differenzierbaren Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

und es sei

$$y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Lösung dazu auf einem offenen Intervall I.

a) Drücke die zweite Ableitung von y mit h, h' und y aus.

b) Drücke die dritte Ableitung von y mit h, h', h'' und y aus.

c) Zeige, dass die n-te Ableitung von y die Form

$$\left(\sum_{\nu} a_\nu \left(\prod_{j=0}^{n-1} \left(h^{(j)}\right)^{\nu_j} \right) \right) \circ y$$

mit gewissen Zahlen $a_\nu \in \mathbb{N}$ für jedes n-Tupel $\nu = (\nu_0, \ldots, \nu_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$ mit $\nu_j \leq n-1$ besitzt.

Lösung

a) Es ist

$$y'(t) = h(y(t)),$$

da es sich um eine Lösung handelt. Die rechte Seite ist differenzierbar, da h und y differenzierbar sind, und nach der Kettenregel ist somit

$$\begin{aligned} y''(t) &= (h(y(t)))' \\ &= h'(y(t))y'(t) \\ &= h'(y(t))h(y(t)) \\ &= (h'h)\,(y(t)). \end{aligned}$$

b) Da h beliebig oft differenzierbar ist, ist

$$y'' = (h'h) \circ y$$

differenzierbar, und es ist

$$\begin{aligned} y'''(t) &= ((h'h)\,(y(t)))' \\ &= (h''(y(t))h(y(t)) + h'(y(t))h'(y(t))) \cdot y'(t) \\ &= (h''(y(t))h(y(t)) + h'(y(t))h'(y(t))) \cdot h(y(t)) \\ &= h''(y(t))h(y(t))h(y(t)) + h'(y(t))h'(y(t))h(y(t)). \end{aligned}$$

c) Wir führen Induktion nach n. Die Aussage ist für $n = 1, 2, 3$ richtig nach Teil a) und b), der Induktionsanfang ist also gesichert. Zum Beweis des Induktionsschrittes von n nach $n+1$ können wir von einer Darstellung

$$y^{(n)} = \left(\sum_{\nu} a_{\nu} \left(\prod_{j=0}^{n-1} \left(h^{(j)}\right)^{\nu_j} \right) \right) \circ y$$

ausgehen. Dies zeigt zunächst, dass y auch $(n+1)$-mal ableitbar ist. Zur Berechnung der Form der Ableitung genügt es, einen Summanden der Form

$$\left(\prod_{j=0}^{n-1} \left(h^{(j)}\right)^{\nu_j} \right) \circ y$$

zu betrachten. Die Ableitung davon ist nach der Ketten- und der Produktregel gleich

$$\begin{aligned}
\left(\left(\prod_{j=0}^{n-1} \left(h^{(j)}\right)^{\nu_j} \right)' \circ y \right) \cdot y' &= \left(\left(\sum_{j=0}^{n-1} \nu_j \left(\prod_{j=0}^{n-1} \left(h^{(j)}\right)^{\nu_j - 1} h^{(j+1)} \right) \right) \circ y \right) \cdot y' \\
&= \left(\left(\sum_{j=0}^{n-1} \nu_j \left(\prod_{j=0}^{n-1} \left(h^{(j)}\right)^{\nu_j - 1} h^{(j+1)} \right) \right) \circ y \right) \cdot (h \circ y) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n-1} \nu_j \left(\prod_{j=0}^{n-1} \left(h^{(j)}\right)^{\nu_j - 1} h^{(j+1)} h \right) \right) \circ y.
\end{aligned}$$

Dabei erhöht sich die höchste Ableitungs von h, die vorkommt, auf n, die Potenzen von $h^{(j)}$ erhöhen sich maximal um 1 und die Koeffizienten sind nach wie vor aus $\mathbb{N}$. Daher liegt insgesamt wieder eine Form wie beschrieben vor.