Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

12. Beispielklausur mit Lösungen

AUFGABE 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Ein *angeordneter* Körper.
(2) Eine *Folge* in einer Menge M.
(3) Eine *Intervallschachtelung* in einem angeordneten Körper K.
(4) Die *komplexe Konjugation*.
(5) Ein *Berührpunkt* einer Menge $T \subseteq \mathbb{K}$.
(6) Eine n-te *komplexe Einheitswurzel* ($n \in \mathbb{N}_+$).
(7) Eine *Treppenfunktion*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem beschränkten reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

(8) Die *Integralfunktion* zum Startpunkt $a \in I$ zu einer Riemann-integrierbaren Funktion

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Lösung

(1) Ein Körper K heißt *angeordnet*, wenn es eine totale Ordnung „$\geq$“ auf K gibt, die die beiden Eigenschaften
   (a) Aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$ (für beliebige $a, b, c \in K$)
   (b) Aus $a \geq 0$ und $b \geq 0$ folgt $ab \geq 0$ (für beliebige $a, b \in K$)
   erfüllt.
(2) Eine Folge in M ist einfach eine Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow M,\ n \longmapsto x_n.$$

(3) Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n],\ n \in \mathbb{N},$$

in K heißt eine Intervallschachtelung, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und wenn die Folge der Intervalllängen, also

$$(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

gegen 0 konvergiert.

(4) Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z = a + bi \longmapsto \overline{z} = a - bi,$$

heißt komplexe Konjugation.

(5) Ein Punkt $x \in \mathbb{K}$ heißt Berührpunkt von T, wenn es (mindestens) eine Folge $x_n \in T$ gibt, die gegen x konvergiert.

(6) Die komplexen Nullstellen des Polynoms

$$X^n - 1$$

heißen n-te komplexe Einheitswurzeln.

(7) Eine Funktion

$$t\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt eine *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

von I gibt derart, dass t auf jedem offenen Teilintervall $]a_{i-1}, a_i[$ konstant ist.

(8) Die Funktion

$$I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt,$$

heißt die Integralfunktion zu f zum Startpunkt a.

AUFGABE 2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Satz von Bolzano-Weierstraß*.

(2) Das *Majorantenkriterium* für eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ von komplexen Zahlen.

(3) Der Satz über die *Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge*

$$f_n\colon\ T \longrightarrow \mathbb{K}$$

auf einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{K}$.

(4) Der *Satz über die lineare Approximierbarkeit* einer Funktion

$$f\colon\ \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

in einem Punkt $a \in \mathbb{K}$.

Lösung

(1) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge von reellen Zahlen. Dann besitzt die Folge eine konvergente Teilfolge.

(2) Es gebe eine konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ von reellen Zahlen mit $|a_k| \leq b_k$ für alle k. Dann ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

absolut konvergent.

(3) Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge und es sei

$$f_n \colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Folge von stetigen Funktionen, die gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert. Dann ist f stetig.

(4) Die Funktion f ist in a genau dann differenzierbar, wenn es ein $s \in \mathbb{K}$ und eine Funktion

$$r \colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

gibt mit r stetig in a und $r(a) = 0$ und mit

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a) .$$

Aufgabe 3. Die offizielle Berechtigung für eine Klausur werde durch mindestens 200 Punkte im Übungsbetrieb erworben. Der Professor sagt, dass es aber auf einen Punkt mehr oder weniger nicht ankomme. Zeige durch eine geeignete Induktion, dass man mit jeder Punkteanzahl zur Klausur zugelassen wird.

Lösung

Wir wollen zeigen, dass man zu jedem $n \in \mathbb{N}$ mit n Punkten zur Klausur zugelassen wird. Dies folgt für $n \geq 200$ unmittelbar aus der offiziellen Grenze. Wir betrachten $n \leq 200$ und setzen $k = 200 - n$. Dies ist eine nichtnegative Zahl, über die wir Induktion führen, die Aussage ist

$$A(k) = \text{mit } 200 - k \text{ Punkten wird man zugelassen} .$$

Bei $k = 0$ ist $n = 200$ und dies reicht zur Zulassung. Sei nun die Aussage für irgend ein $k \in \mathbb{N}$ bewiesen, d.h. mit $n = 200 - k$ Punkten wird man zugelassen. Es ist zu zeigen, dass die Aussage auch für $k+1$ gilt, d.h. dass man auch mit $n = 200 - k - 1$ Punkten zugelassen wird. Wenn das aber nicht so wäre, so würde man mit $200 - k$ Punkten zugelassen werden, aber nicht mit einem Punkt weniger, und es würde doch auf einen einzigen Punkt ankommen im Widerspruch zur Zusicherung des Professors.

Aufgabe 4. Hans will sich ein Frühstücksei kochen. Im Moment, als er das Ei in das kochende Wasser eintaucht, zeigt seine Uhr $7:21$ (die Uhr läuft genau und hat keine Sekundenangabe). Als er das nächste Mal auf die Uhr schaut, zeigt sie $7:26$ an. Bestimme das Infimum, Minimum, Supremum, Maximum der Zeit, die das Ei zwischen den beiden Momenten im Wasser ist.

Lösung

Wir messen die Zeit in Minuten nach 7 Uhr. Der Eintauchzeitpunkt ist eine Zahl $a \in [21, 22[$, der rechte Rand ist nicht möglich, da die Uhr dann schon $7 : 22$ anzeigen würde. Der zweite Moment wird durch $b \in [26, 27[$ beschrieben. Es ist also

$$21 \leq a < 22$$

und

$$26 \leq b < 27,$$

wobei die Abschätzungen optimal sind. Die Differenz ist nach unten durch

$$b - a > 26 - 22 = 4$$

beschränkt. Da diese Abschätzung optimal ist, folgt, dass das Infimum gleich 4 ist und dass das Minimum nicht existiert. Die Differenz ist nach oben durch

$$b - a < 27 - 21 = 6$$

beschränkt. Das Supremum ist also 6 und das Maximum existiert nicht.

Aufgabe 5. Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z| < 1$. Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Lösung

Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es ist

$$|z^n| = |z|^n ,$$

so dass es genügt, die Aussage für reelles r, $0 \leq r < 1$, zu zeigen. Es ist

$$t := \frac{1}{r} > 1,$$

wir schreiben $t = 1 + \delta$ mit $\delta > 0$. Aufgrund des Archimedes-Prinzips gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$n_0 \delta \geq \frac{1}{\epsilon}$$

ist. Nach Fakt ***** gilt somit für $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$t^n = t^{n_0} = (1 + \delta)^{n_0} \geq 1 + n_0 \delta \geq \frac{1}{\epsilon}.$$

Also ist

$$r^n = \left(\frac{1}{t}\right)^n \leq \epsilon$$

für $n \geq n_0$.

Aufgabe 6. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

konvergiert.

Lösung

Wir zeigen, dass die Reihe absolut konvergiert, woraus nach Fakt ***** die Konvergenz folgt. Wegen $-1 \leq \sin x \leq 1$ ist

$$\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert nach Beispiel 9.12, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{n^2} \right|$ nach dem Majorantenkriterium konvergiert.

Aufgabe 7. Beweise die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$.

Lösung

Nehmen wir an, die Menge der reellen Zahlen sei abzählbar, dann ist insbesondere auch das Einheitsintervall $[0,1[$ abzählbar. Sei also

$$\psi\colon \mathbb{N}_+ \longrightarrow [0,1[$$

eine surjektive Abbildung. Wir betrachten die reellen Zahlen als Ziffernfolgen im Dreiersystem: Jede reelle Zahl $r \in [0,1[$ besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung als Reihe

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(r) 3^{-k} \,,$$

wobei die k-te Nachkommaziffer $z_k(r) \in \{0,1,2\}$ ist und wobei nicht fast alle Ziffern gleich 2 sind (sonst hätte man keine Eindeutigkeit). Wir definieren nun eine reelle Zahl durch $s = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 3^{-k}$ mit

$$b_k = \begin{cases} 0, \text{ falls } (\psi(k))_k = 1 \text{ oder } 2, \\ 1, \text{ falls } (\psi(k))_k = 0 \,. \end{cases}$$

Wir behaupten, dass diese Zahl s nicht in der Aufzählung ψ vorkommt. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist nämlich $\psi(k) \neq s$, da $\psi(k)$ sich nach Konstruktion von s an der k-ten Nachkommastelle unterscheidet. Also ist ψ doch nicht surjektiv.

Aufgabe 8. Zeige, dass der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ nicht gelten muss.

Lösung

Die Funktion

$$f\colon\, \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\, x \longmapsto x^2 - 2,$$

ist stetig und es ist $f(0) = -2 < 0$ und $f(2) = 2 > 0$. Wenn der Zwischenwertsatz auch rational gelten würde, müsste es im rationalen Intervall $[0, 2]$ eine Nullstelle geben, also ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$. Dies kann es aber nicht geben, da die Quadratwurzel aus 2 irrational ist.

Aufgabe 9. Beweise den Satz über die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge

$$f_n\colon\, T \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Lösung

Sei $x \in T$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz gibt es ein n_0 mit $d(f_n(y), f(y)) \leq \epsilon/3$ für alle $n \geq n_0$ und alle $y \in T$. Wegen der Stetigkeit von f_{n_0} in x gibt es ein $\delta > 0$ mit $d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) \leq \epsilon/3$ für alle $y \in T$ mit $d(x, y) \leq \delta$. Für diese y gilt somit

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + d(f_{n_0}(y), f(y)) \\ &\leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Aufgabe 10. Bestimme, ob die Familie

$$\frac{1}{q^2},\, q \in \mathbb{Q} \cap\, [2, 3]\,,$$

summierbar ist oder nicht.

Lösung

Wir zeigen, dass diese Familie nicht summierbar ist. Es genügt zu zeigen, dass die endlichen Teilsummen der Familie unbeschränkt sind. Sei dazu $b > 0$ gegeben. Aufgrund des Archimedesprinzips gibt es ein $n \in \mathbb{N}_+$ mit $n \cdot \frac{1}{9} \geq b$. Zwischen 2 und 3 gibt es unendlich viele rationale Zahlen, so dass wir n verschiedene rationale Zahlen $q_1, \ldots, q_n$ in diesem Intervall wählen können. Für die zugehörige endliche Teilsumme gilt dann

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i^2} \,\geq\, n \cdot \frac{1}{9} \,\geq\, b,$$

so dass b überschritten wird.

Aufgabe 11. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sin(2x)}\,.$$

Lösung

Wir verwenden die Regel von Hospital. Die Ableitung der Zählerfunktion ist

$$(\ln(x+1))' = \frac{1}{x+1}$$

mit dem Wert 1 für $x = 0$ und die Ableitung der Nennerfunktion ist

$$(\sin 2x)' = 2\cos 2x$$

mit dem Wert 2 für $x = 0$. Daher ist Hospital anwendbar und es ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 12. Zeige, dass für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$, die Gleichheit

$$\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

gilt.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned}
\cosh\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right) &= \frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} + e^{-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2+1}{x+\sqrt{x^2-1}}\\
&= \frac{1}{2}\frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1+1}{x+\sqrt{x^2-1}}\\
&= \frac{x^2+x\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\\
&= x.
\end{aligned}$$

Wir wenden die Umkehrfunktion $\operatorname{arcosh} x$ auf diese Gleichung an und erhalten

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \operatorname{arcosh} x\,.$$

Aufgabe 13. Es seien

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen und sei

$$h(x) = (g(f(x)))^2 f(g(x)) .$$

a) Drücke die Ableitung h' mit den Ableitungen von f und g aus.

b) Sei nun

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ und } g(x) = x + 2 .$$

Berechne $h'(x)$ auf zwei verschiedene Arten, einerseits über $h(x)$ und andererseits über die Formel aus Teil a).

Lösung

a) Nach der Produkt- und Kettenregel ist

$$h'(x) = (g(f(x)))^2 \cdot f'(g(x)) \cdot g'(x) + 2g(f(x)) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f(g(x)) .$$

b) Wir berechnen zuerst $h(x)$. Es ist

$$\begin{aligned} h(x) &= (x^2+1)^2 \cdot ((x+2)^2 - 1) \\ &= (x^4 + 2x^2 + 1)(x^2 + 4x + 3) \\ &= x^6 + 4x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 4x + 3. \end{aligned}$$

Die Ableitung ist daher

$$h'(x) = 6x^5 + 20x^4 + 20x^3 + 24x^2 + 14x + 4 .$$

Andererseits ist

$$f'(x) = 2x \text{ und } g'(x) = 1$$

und daher nach Teil a)

$$\begin{aligned} h'(x) &= (g(f(x)))^2 \cdot f'(g(x)) \cdot g'(x) + 2g(f(x)) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f(g(x)) \\ &= (x^4 + 2x^2 + 1)2(x+2) + 2(x^2+1)(2x)(x^2+4x+3) \\ &= 2(x^5 + 2x^3 + x + 2x^4 + 4x^2 + 2) + 4x(x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x^2 + 4x + 3) \\ &= 2(x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x + 2) + 4x(x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3) \\ &= 6x^5 + 20x^4 + 20x^3 + 24x^2 + 14x + 4. \end{aligned}$$

Aufgabe 14. Bestimme die Ableitung (auf den jeweiligen Definitionsbereichen) der folgenden Funktionen:

a) $\tan x$,

b) $\arctan x$.

Lösung

a)

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (\arctan x)' &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} \\ &= \frac{1}{\frac{\cos^2(\arctan x) + \sin^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)}} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 15. Bestimme für die Funktionen $\sin^n x$, $n \in \mathbb{N}_+$, das Konvexitätsverhalten und die Wendepunkte auf $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Lösung

Bei $n = 1$ ist die zweite Ableitung $-\sin x$ im Innern des angegebenen Intervalls negativ, also ist der Sinus dort nach Korollar 20.6 eine konkave Funktion. Sei $n \geq 2$ und $f(x) = \sin^n x$. Die Ableitung ist

$$f'(x) = n \sin^{n-1} x \cos x$$

und die zweite Ableitung ist

$$\begin{aligned} f''(x) &= n(n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x - n \sin^{n-1} x \sin x \\ &= n \sin^{n-2} x \left((n-1) \cos^2 x - \sin^2 x\right) \\ &= n \sin^{n-2} x \left(n \cos^2 x - 1\right). \end{aligned}$$

Der Faktor vorne ist im Innern des Intervalls positiv, also müssen wir nur den zweiten Faktor untersuchen. Es ist

$$n \cos^2 x - 1 \geq 0$$

genau dann, wenn

$$\cos x \geq \sqrt{\frac{1}{n}}$$

ist. Für $x \leq \arccos\sqrt{\frac{1}{n}}$ ist $\sin^n x$ also konvex und für $x \geq \arccos\sqrt{\frac{1}{n}}$ ist $\sin^n x$ konkav. Bei $x = \arccos\sqrt{\frac{1}{n}}$ liegt der Wendepunkt vor.

Aufgabe 16. a) Unterteile das Intervall $[-4, 5]$ in sechs gleichgroße Teilintervalle.

b) Bestimme das Treppenintegral derjenigen Treppenfunktion auf $[-4, 5]$, die auf der in a) konstruierten Unterteilung abwechselnd die Werte 2 und -1 annimmt.

Lösung

a) Die Länge des Intervalls ist 9, daher muss die Länge der Teilintervalle gleich $\frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1,5$ sein. Dies ergibt die Teilintervalle

$$[-4, \frac{-5}{2}],\ [\frac{-5}{2}, -1],\ [-1, \frac{1}{2}],\ [\frac{1}{2}, 2],\ [2, \frac{7}{2}],\ [\frac{7}{2}, 5]\,.$$

b) Die Treppenfunktion, die abwechselnd die Werte 2 und -1 besitzt, hat das Treppenintegral

$$1,5 \cdot (2 - 1 + 2 - 1 + 2 - 1) \;=\; 1,5 \cdot 3 \;=\; 4,5.$$

Aufgabe 17. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3.$$

a) Bestimme zu einer Geraden $y = sx$, $s > 0$, die Schnittpunkte mit dem Graphen von f.

b) Zu einer gegebenen Geraden aus Teil (a) legen der Schnittpunkt (c, d) mit $c > 0$, sein Basipunkt $(c, 0)$ und der Nullpunkt $(0, 0)$ ein Dreieck fest. Zeige, dass der Graph von f dieses Dreieck in zwei gleich große Flächen zerlegt.

Lösung

a) Wir setzen

$$sx \;=\; x^3.$$

Dies ergibt die Lösungen $x = 0$, $x = \sqrt{s}$ und $x = -\sqrt{s}$, die Schnittpunkte sind also

$$(0, 0), (\sqrt{s}, \sqrt{s}^3) \text{ und } (-\sqrt{s}, -\sqrt{s}^3)$$

b) Die Eckpunkte des Dreiecks sind

$$(0, 0), (\sqrt{s}, \sqrt{s}^3) \text{ und } (\sqrt{s}, 0)$$

Sein Flächeninhalt ist demnach gleich

$$I \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{s}\sqrt{s}^3 \;=\; \frac{1}{2}s^2.$$

Der Flächeninhalt innerhalb des Dreiecks und unterhalb des Graphen berechnet sich als bestimmtes Integral zu

$$\int_0^{\sqrt{s}} x^3 dx = \frac{1}{4}\sqrt{s}^4 = \frac{1}{4}s^2.$$

Dies ist die Hälfte des Dreiecksinhalts.

Aufgabe 18. Sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für jede stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeige $f = 0$.

Lösung

Es sei

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für jede stetige Funktion

$$g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Da f selbst stetig ist, gilt diese Beziehung insbesondere für $g = f$, es ist also

$$\int_a^b f(x)^2 dx = 0.$$

Nehmen wir an, dass f nicht die Nullfunktion ist. Sei $c \in [a,b]$ mit $f(c) \neq 0$. Dann ist $f(c)^2 = \epsilon > 0$ und da f^2 stetig ist, gibt es ein Teilintervall $c \in [s,t] \subseteq [a,b]$, worauf die Werte der Funktion f^2 mindestens so groß wie $\epsilon/2$ sind. Wegen $f^2 \geq 0$ ist daher

$$\begin{aligned}
\int_a^b f^2(x)dx &= \int_a^s f^2(x)dx + \int_s^t f^2(x)dx + \int_t^b f^2(x)dx \\
&\geq \int_s^t f^2(x)dx \\
&\geq (t-s)\frac{\epsilon}{2} \\
&> 0
\end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe 19. Es sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Finde eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung, für die f eine Lösung ist.

Lösung

Die Funktion f ist eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = \frac{f'}{f} y.$$

Wegen $f(t) \in \mathbb{R}_+$ ist diese wohldefiniert. Einsetzen von f zeigt unmittelbar, dass eine Lösung vorliegt.