Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

11. Beispielklausur mit Lösungen

AUFGABE 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Ein *angeordneter* Körper.
(2) Eine *Folge* in einer Menge M.
(3) Eine *Intervallschachtelung* in einem angeordneten Körper K.
(4) Die *komplexe Konjugation*.
(5) Ein *Berührpunkt* einer Menge $T \subseteq \mathbb{K}$.
(6) Eine n-te *komplexe Einheitswurzel* ($n \in \mathbb{N}_+$).
(7) Eine *Treppenfunktion*
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem beschränkten reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
(8) Die *Integralfunktion* zum Startpunkt $a \in I$ zu einer Riemann-integrierbaren Funktion
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Lösung

(1) Ein Körper K heißt *angeordnet*, wenn es eine totale Ordnung „$\geq$“ auf K gibt, die die beiden Eigenschaften
 (a) Aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$ (für beliebige $a, b, c \in K$)
 (b) Aus $a \geq 0$ und $b \geq 0$ folgt $ab \geq 0$ (für beliebige $a, b \in K$)
erfüllt.
(2) Eine Folge in M ist einfach eine Abbildung
$$\mathbb{N} \longrightarrow M,\, n \longmapsto x_n.$$
(3) Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen
$$I_n = [a_n, b_n],\, n \in \mathbb{N}\,,$$
in K heißt eine Intervallschachtelung, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und wenn die Folge der Intervalllängen, also
$$(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}\ ,$$
gegen 0 konvergiert.

(4) Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z = a + bi \longmapsto \overline{z} = a - bi,$$

heißt komplexe Konjugation.

(5) Ein Punkt $x \in \mathbb{K}$ heißt Berührpunkt von T, wenn es (mindestens) eine Folge $x_n \in T$ gibt, die gegen x konvergiert.

(6) Die komplexen Nullstellen des Polynoms

$$X^n - 1$$

heißen n-te komplexe Einheitswurzeln.

(7) Eine Funktion

$$t \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt eine *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

von I gibt derart, dass t auf jedem offenen Teilintervall $]a_{i-1}, a_i[$ konstant ist.

(8) Die Funktion

$$I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt,$$

heißt die Integralfunktion zu f zum Startpunkt a.

Aufgabe 2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Die *Bernoulli-Ungleichung* für einen angeordneten Körper.
(2) Das *Quetschkriterium* für reelle Folgen.
(3) Der *Entwicklungssatz für Potenzreihen* (die Koeffizienten der umentwickelten Potenzreihe müssen nicht angegeben werden).
(4) Die „*Periodizitätseigenschaft*“ für Kosinus und Sinus bei Addition mit $\frac{\pi}{2}$.

Lösung

(1) Für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$(1 + x)^n \,\geq\, 1 + nx.$$

(2) Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folgen. Es gelte

$$x_n \leq y_n \leq z_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Dann konvergiert auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a.

(3) Es sei

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

eine konvergente Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$ und sei $b \in U(a, R)$. Dann gibt es eine konvergente Potenzreihe

$$h = \sum_{i=0}^{\infty} d_i (z-b)^i$$

mit Entwicklungspunkt b und mit einem Konvergenzradius $s \geq R - |a-b| > 0$ derart, dass die durch diese beiden Potenzreihen dargestellten Funktionen auf $U(b, s)$ übereinstimmen.

(4) Es ist $\cos(z + \pi/2) = -\sin z$ und $\sin(z + \pi/2) = \cos z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 3. Bestimme die reellen Intervalle, die die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung sind.

$$|2x - 5| < |3x - 4| \ .$$

Lösung

Für $x < \frac{4}{3} \leq \frac{5}{2}$ sind sowohl $3x - 4$ als auch $2x - 5$ negativ. In diesem Bereich ist die Betragsungleichung daher äquivalent zu

$$-2x + 5 < -3x + 4.$$

Dies ist äquivalent zu $x < -1$.

Für $\frac{4}{3} \leq x < \frac{5}{2}$ ist $3x - 4$ nichtnegativ und $2x - 5$ negativ. In diesem Bereich ist die Betragsungleichung daher äquivalent zu

$$-2x + 5 < 3x - 4.$$

Dies ist äquivalent zu $5x > 9$ und zu $x > \frac{9}{5}$.

Für $x \geq \frac{5}{2}$ sind sowohl $3x - 4$ als auch $2x - 5$ nichtnegativ. In diesem Bereich ist die Betragsungleichung daher äquivalent zu

$$2x - 5 < 3x - 4$$

und dies ist äquivalent zu $x > -1$.

Als Lösungsmenge ergeben sich also die beiden offenen Intervalle $]-\infty, -1[$ und $]\frac{9}{5}, \infty[$.

Aufgabe 4. Entscheide, ob die Folge

$$x_n = \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Für $n \geq 1$ kann man die Folge (durch Erweiterung mit $1/n^3$) schreiben als

$$x_n := \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8} = \frac{3 - \frac{1}{n} - \frac{7}{n^3}}{2 + \frac{1}{n^2} + \frac{8}{n^3}}.$$

Folgen vom Typ a/n, a/n^2 und a/n^3 sind Nullfolgen. Aufgrund der Summenregel für konvergente Folgen konvergiert der Zähler gegen 3 und der Nenner gegen 2, so dass nach der Quotientenregel die Folge insgesamt gegen $3/2 \in \mathbb{Q}$ konvergiert.

Aufgabe 5. Beweise die Bernoulli-Ungleichung für einen angeordneten Körper.

Lösung

Wir führen Induktion über n. Bei $n = 0$ steht beidseitig 1, so dass die Aussage gilt. Sei nun die Aussage für n bereits bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x, \end{aligned}$$

da natürliche Zahlen und Quadrate in einem angeordneten Körper nichtnegativ sind.

Aufgabe 6. Es sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl mit $b < 0$. Zeige, dass

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sqrt{|z| + a} + i\sqrt{|z| - a} \right)$$

eine Quadratwurzel von z ist.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sqrt{|z| + a} + i\sqrt{|z| - a} \right) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(|z| + a - (|z| - a) - 2i\sqrt{(|z| + a)(|z| - a)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2a - 2i\sqrt{|z|^2 - a^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2a - 2i\sqrt{b^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (2a - 2i(-b)) \\ &= a + bi. \end{aligned}$$

Aufgabe 7. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und

$$g\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

eine Bijektion. Es sei vorausgesetzt, dass die Folge $f(g(n))$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert. Zeige, dass f konstant ist.

Lösung

Nehmen wir an, dass f stetig, aber nicht konstant ist. Dann gibt es zwei Punkte $x, x' \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \neq f(x')$. Sei $a = |f(x) - f(x')| > 0$ der Betrag der Differenz der Funktionswerte. Wir setzen $\epsilon = a/5$. Wegen der Stetigkeit gibt es ein $\delta > 0$ und ein $\delta' > 0$ derart, dass $f([x-\delta, x+\delta]) \subseteq [f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon]$ und $f([x'-\delta', x'+\delta']) \subseteq [f(x')-\epsilon, f(x')+\epsilon]$ ist. Da es in der δ-Umgebung von x und der δ'-Umgebung von x' unendlich viele rationale Zahlen gibt, gibt es auch unendlich viele Indizes der Folge mit $f(g(n)) \in [f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon]$ und unendlich viele Indizes mit $f(g(n)) \in [f(x')-\epsilon, f(x')+\epsilon]$.

Es sei y der Grenzwert der Folge $f(g(n))$. Aufgrund der Konvergenz der Folge gibt es ein n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ alle Folgenglieder $f(g(n))$ in der ϵ-Umgebung von y liegen. Diese Umgebung ist aber zu mindestens einer der ϵ-Umgebungen von $f(x)$ oder $f(x')$ disjunkt, so dass ein Widerspruch vorliegt.

Aufgabe 8. Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^2 + \sin x\,,$$

genau zwei Nullstellen besitzt.

Lösung

Bei $x = 0$ liegt eine Nullstelle vor. Auf $]0, \pi[$ sind beide Summanden positiv, und für $x \geq \pi$ ist $x^2 \geq 9$, so dass, da $\sin x$ zwischen -1 und 1 liegt, jenseits von 0 keine Nullstelle liegen kann. Für $x < -1$ ist wiederum $x^2 > 1$, so dass unterhalb von -1 auch keine Nullstelle liegen kann. Für das Intervall $[-1, 0]$ ziehen wir die Ableitung heran. Es ist

$$f'(x) = 2x + \cos x\,.$$

Beide Funktion sind in diesem Intervall streng wachsend, daher ist die Ableitung streng wachsend und besitzt auf $]-1, 0[$ höchstens eine Nullstelle. Es ist $f'(0) = 1 > 0$, so dass im Nullpunkt kein lokales Extremum vorliegen kann. Daher muss die Funktion auf $]-1, 0[$ auch negative Werte annehmen. Wegen $f(-1) = 1 + \sin(-1) > 0$ muss f nach dem Zwischenwertsatz in $]-1, 0[$ mindestens eine weitere Nullstelle besitzen. Wenn es zwei Nullstellen $-1 < c < d < 0$ geben würde, so hätte nach dem Satz von Rolle die

Ableitung sowohl auf $]c,d[$ als auch auf $]d,0[$ eine Nullstelle, was wir schon ausgeschlossen haben.

Aufgabe 9. Es seien

$$g_1, g_2, \ldots, g_n \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

differenzierbare Funktionen. Beweise durch Induktion über n die Beziehung

$$\left(\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n}\right)' = \frac{-1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \left(\frac{g_1'}{g_1} + \frac{g_2'}{g_2} + \cdots + \frac{g_n'}{g_n}\right).$$

Lösung

Für $n = 1$ ist nach der Kettenregel

$$\left(\frac{1}{g_1}\right)' = -\frac{g_1'}{g_1^2} = -\frac{1}{g_1} \cdot \frac{g_1'}{g_1}.$$

Zum Induktionsschluss sei die Aussage für n Funktionen schon bewiesen, und seien $n+1$ Funktionen gegeben. Dann ist aufgrund der Produktregel und der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n \cdot g_{n+1}}\right)' \\
= & \left(\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \frac{1}{g_{n+1}}\right)' \\
= & \left(\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n}\right)' \cdot \frac{1}{g_{n+1}} + \frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \left(\frac{1}{g_{n+1}}\right)' \\
= & -\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \left(\frac{g_1'}{g_1} + \frac{g_2'}{g_2} + \cdots + \frac{g_n'}{g_n}\right) \cdot \frac{1}{g_{n+1}} + \frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \left(-\frac{1}{g_{n+1}} \cdot \frac{g_{n+1}'}{g_{n+1}}\right) \\
= & -\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n \cdot g_{n+1}} \cdot \left(\frac{g_1'}{g_1} + \frac{g_2'}{g_2} + \cdots + \frac{g_n'}{g_n}\right) - \frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n \cdot g_{n+1}} \cdot \frac{g_{n+1}'}{g_{n+1}} \\
= & -\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n \cdot g_{n+1}} \cdot \left(\frac{g_1'}{g_1} + \frac{g_2'}{g_2} + \cdots + \frac{g_n'}{g_n} + \frac{g_{n+1}'}{g_{n+1}}\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 10. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei ζ eine n-te komplexe Einheitswurzel. Es sei

$$f \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto f(z),$$

eine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass die Gleichheit $f(\zeta z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gelte. Zeige, dass die Ableitung die Beziehung $f'(\zeta z) = \zeta^{-1} f'(z)$ erfüllt.

Lösung

Für $h \neq 0$ ist

$$\frac{f(\zeta z + h) - f(\zeta z)}{h} = \frac{f(\zeta z + \zeta \frac{h}{\zeta}) - f(\zeta z)}{h}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{f(z+\frac{h}{\zeta})-f(z)}{\zeta\frac{h}{\zeta}} \\
&= \frac{1}{\zeta}\frac{f(z+\frac{h}{\zeta})-f(z)}{\frac{h}{\zeta}}.
\end{aligned}
$$

Für $h \to 0$ ist auch $\frac{h}{\zeta} \to 0$ und daher geht der Ausdruck $\frac{f(z+\frac{h}{\zeta})-f(z)}{\frac{h}{\zeta}}$ gegen $f'(z)$. Somit gilt

$$
f'(\zeta z) = \zeta^{-1} f'(z).
$$

AUFGABE 11. Zeige, dass die beiden Definitionen für die Zahl e übereinstimmen, beweise also die Gleichheit

$$
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.
$$

Lösung

Aufgrund von Korollar 20.12 ist $\ln'(1) = 1$. Dies bedeutet aufgrund der Definition des Differentialquotienten insbesondere

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1\,.
$$

Wir schreiben die Folgenglieder der linken Seite als $n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ und wenden darauf die Exponentialfunktion an. Daraus ergibt sich unter Verwendung der Stetigkeit und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion die Gleichungskette

$$
\begin{aligned}
\exp 1 &= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\exp\left(n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= e.
\end{aligned}
$$

AUFGABE 12. Bestimme das Taylorpolynom vom Grad 2 der Funktion

$$
f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto f(z) = \frac{z^2-z+3}{z},
$$

im Entwicklungspunkt i.

Lösung

Es ist

$$f(i) = \frac{i^2 - i + 3}{i} = \frac{-i + 2}{i} = -1 - 2i.$$

Für die erste Ableitung gilt

$$f'(z) = \frac{(2z-1)z - z^2 + z - 3}{z^2} = \frac{z^2 - 3}{z^2}$$

und somit

$$f'(i) = \frac{i^2 - 3}{i^2} = \frac{-4}{-1} = 4.$$

Für die zweite Ableitung gilt

$$f''(z) = \frac{(2z)z^2 - (z^2 - 3)2z}{z^4} = \frac{2(z^2 - z^2 + 3)}{z^3} = \frac{6}{z^3}$$

und somit

$$f'(i) = \frac{6}{i^3} = 6i.$$

Das Taylor-Polynom vom Grad 2 ist daher

$$-1 - 2i + 4(z - i) + 3i(z - i)^2\,.$$

Aufgabe 13. Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die beiden Graphen zu $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ eingeschlossen wird.

Lösung

Für x zwischen 0 und 1 ist $0 \leq x^2 \leq x \leq \sqrt{x} \leq 1$ und für $x \geq 1$ ist $x^2 \geq \sqrt{x}$. Die eingeschlossene Fläche liegt also innerhalb des Einheitsquadrates. Daher ist der Flächeninhalt gleich dem bestimmten Integral der Wurzelfunktion von 0 bis 1 minus dem bestimmten Integral (in den gleichen Grenzen) zur Parabel. Daher ist der Flächeninhalt gleich

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}|_0^1 - \frac{1}{3}x^3|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 14. Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{x^2 + 1}{x(x-1)(x-2)}$$

für $x > 2$.

Lösung

Wir machen den Ansatz für die Partialbruchzerlegung, also

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x-2}.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner führt auf

$$\begin{aligned} x^2+1 &= \alpha(x-1)(x-2) + \beta x(x-2) + \gamma x(x-1) \\ &= \alpha(x^2-3x+2) + \beta(x^2-2x) + \gamma(x^2-x) \\ &= x^2(\alpha+\beta+\gamma) + x(-3\alpha-2\beta-\gamma) + 2\alpha. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\alpha+\beta+\gamma = 1,$$

$$-3\alpha-2\beta-\gamma = 0,$$

und

$$2\alpha = 1.$$

Addition der ersten beiden Gleichungen ergibt

$$-2\alpha-\beta = 1.$$

Also ist $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\beta = -2\alpha-1 = -2$$

und

$$\gamma = 1-\alpha-\beta = \frac{5}{2}.$$

Somit ist

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - 2\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x-2}$$

und eine Stammfunktion ist

$$\frac{1}{2}\cdot \ln x - 2\cdot \ln(x-1) + \frac{5}{2}\cdot \ln(x-2)\,.$$

Aufgabe 15. a) Finde alle Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{\sin t}{\cos t} y + (t^2-3)\cos t$$

für $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

b) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{\sin t}{\cos t} y + (t^2-3)\cos t \text{ mit } y(0) = 7\,.$$

Lösung

a) Wir berechnen zuerst die Lösungen der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{\sin\, t}{\cos\, t} y\,.$$

Eine Stammfunktion zu $g(t) = -\frac{\sin\, t}{\cos\, t}$ ist $G(t) = \ln\,(\,\cos\, t\,)$. Daher sind (mit $c \in \mathbb{R}$)

$$c \cdot e^{\ln\,(\,\cos\, t\,)} \;=\; c \cdot\, \cos\, t$$

die Lösungen der homogenen Gleichung.

Zur Bestimmung einer Lösung der inhomogenen Gleichung müssen wir eine Stammfunktion zu

$$(t^2 - 3) \cdot\, \cos\, t\, \cdot (\,\cos\, t\,)^{-1} = t^2 - 3$$

bestimmen. Eine solche ist $\frac{1}{3}t^3 - 3t$. Somit sind die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung gleich

$$\left(\frac{1}{3}t^3 - 3t\right)\, \cos\, t\, + c \cdot\, \cos\, t\,, c \in \mathbb{R}.$$

b) Zur Lösung des Anfangswertproblems müssen wir das c aus Teil a) bestimmen. Die Anfangsbedingung führt auf

$$c\, \cos\, 0 \;=\; 7,$$

also ist $c = 7$ und

$$\left(\frac{1}{3}t^3 - 3t\right)\, \cos\, t\, + 7 \cdot\, \cos\, t$$

ist die Lösung des Anfangswertproblems.