Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

11. Beispielklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	3	3	4	2	7	5	5	4	6	4	3	5	5	64
erhaltene Pkt.:																

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Ein *angeordneter* Körper.
(2) Eine *Folge* in einer Menge M.
(3) Eine *Intervallschachtelung* in einem angeordneten Körper K.
(4) Die *komplexe Konjugation*.
(5) Ein *Berührpunkt* einer Menge $T \subseteq \mathbb{K}$.
(6) Eine n-te *komplexe Einheitswurzel* ($n \in \mathbb{N}_+$).
(7) Eine *Treppenfunktion*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem beschränkten reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

(8) Die *Integralfunktion* zum Startpunkt $a \in I$ zu einer Riemann-integrierbaren Funktion

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Die *Bernoulli-Ungleichung* für einen angeordneten Körper.
(2) Das *Quetschkriterium* für reelle Folgen.
(3) Der *Entwicklungssatz für Potenzreihen* (die Koeffizienten der umentwickelten Potenzreihe müssen nicht angegeben werden).
(4) Die „*Periodizitätseigenschaft*“ für Kosinus und Sinus bei Addition mit $\frac{\pi}{2}$.

AUFGABE 3. (3 Punkte)

Bestimme die reellen Intervalle, die die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung sind.

$$|2x-5| < |3x-4| \ .$$

AUFGABE 4. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$x_n = \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

AUFGABE 5. (4 Punkte)

Beweise die Bernoulli-Ungleichung für einen angeordneten Körper.

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Es sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl mit $b < 0$. Zeige, dass

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sqrt{|z| + a} + i \sqrt{|z| - a} \right)$$

eine Quadratwurzel von z ist.

Aufgabe 7. (7 Punkte)

Es sei

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und

$$g \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

eine Bijektion. Es sei vorausgesetzt, dass die Folge $f(g(n))$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert. Zeige, dass f konstant ist.

Aufgabe 8. (5 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^2 + \sin x\,,$$

genau zwei Nullstellen besitzt.

Aufgabe 9. (5 Punkte)

Es seien

$$g_1, g_2, \ldots, g_n \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

differenzierbare Funktionen. Beweise durch Induktion über n die Beziehung

$$\left(\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \right)' = \frac{-1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \left(\frac{g_1'}{g_1} + \frac{g_2'}{g_2} + \cdots + \frac{g_n'}{g_n} \right).$$

Aufgabe 10. (4 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei ζ eine n-te komplexe Einheitswurzel. Es sei

$$f \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto f(z),$$

eine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass die Gleichheit $f(\zeta z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gelte. Zeige, dass die Ableitung die Beziehung $f'(\zeta z) = \zeta^{-1} f'(z)$ erfüllt.

AUFGABE 11. (6 Punkte)

Zeige, dass die beiden Definitionen für die Zahl e übereinstimmen, beweise also die Gleichheit

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

AUFGABE 12. (4 Punkte)

Bestimme das Taylorpolynom vom Grad 2 der Funktion

$$f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto f(z) = \frac{z^2-z+3}{z},$$

im Entwicklungspunkt i.

AUFGABE 13. (3 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die beiden Graphen zu $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ eingeschlossen wird.

AUFGABE 14. (5 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x-2)}$$

für $x > 2$.

AUFGABE 15. (5 (4+1) Punkte)

a) Finde alle Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{\sin t}{\cos t}y + (t^2-3)\cos t$$

für $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

b) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{\sin t}{\cos t}y + (t^2-3)\cos t \text{ mit } y(0) = 7\,.$$