Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

10. Beispielklausur mit Lösungen

Aufgabe 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *injektive* Abbildung
$$f\colon M \longrightarrow N.$$
(2) Eine *Cauchy-Folge* in $\mathbb{R}$.
(3) Die *Supremumsnorm* einer Funktion
$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einer Menge T.
(4) Der *natürliche Logarithmus*
$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$
(5) Die *Ableitungsfunktion* zu einer differenzierbaren Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
(6) Das *bestimmte Integral* zu einer Riemann-integrierbaren Funktion
$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$
(7) Die *Lösung eines Anfangswertproblems*
$$y' = f(t,y) \text{ und } y(t_0) = y_0\,,$$
zu einer Funktion
$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$
(8) Eine gewöhnliche Differentialgleichung mit *getrennten Variablen.*

Lösung

(1) Die Abbildung
$$f\colon M \longrightarrow N$$
ist injektiv, wenn für je zwei verschiedene Elemente $x, y \in M$ auch $f(x)$ und $f(y)$ verschieden sind.

(2) Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

gilt.

(3) Man nennt

$$|| f || := \sup(|f(x)| \,|x \in T)$$

die Supremumsnorm von f.

(4) Der natürliche Logarithmus

$$\ln :\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln x,$$

ist als die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion definiert.

(5) Die Ableitungsfunktion ist die Abbildung

$$f' \colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f'(x),$$

die jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung von f an der Stelle x zuordnet.

(6) Das nach Voraussetzung existierende Oberintegral zu f über $[a, b]$ heißt bestimmtes Integral.

(7) Man nennt eine Funktion

$$y\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t),$$

auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = f(t, y) \text{ und } y(t_0) = y_0\,,$$

wenn y eine Lösung der Differentialgleichung ist und wenn zusätzlich

$$y(t_0) = y_0$$

gilt.

(8) Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

mit Funktionen (dabei sind I und J reelle Intervalle)

$$g\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

und

$$h\colon\ J \longrightarrow \mathbb{R},\ y \longmapsto h(y),$$

heißt gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Aufgabe 2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Satz über die Eindeutigkeit des Limes* in einem angeordneten Körper K.

(2) Der *Satz über die Anzahl von Nullstellen eines Polynoms* über einem Körper K.

(3) Der *Satz über die stetige Umkehrfunktion.*

(4) Die *Newton-Leibniz Formel.*

Lösung

(1) Eine Folge in einem angeordneten Körper besitzt maximal einen Limes.
(2) Ein von 0 verschiedenes Polynom $P \in K[X]$ vom Grad d besitzt P maximal d Nullstellen.
(3) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und
$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetige, streng wachsende Funktion. Dann ist das Bild $J := f(I)$ ebenfalls ein Intervall, und die Umkehrabbildung
$$f^{-1}\colon\ J \longrightarrow I$$
ist ebenfalls stetig.
(4) Sei I ein reelles Intervall und sei
$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetige Funktion, für die F eine Stammfunktion sei. Dann gilt für $a < b$ aus I die Gleichheit
$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; F(b) - F(a).$$

Aufgabe 3. Es seien
$$f, g, h\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
Funktionen.

a) Zeige die Gleichheit
$$(h \cdot g) \circ f \;=\; (h \circ f) \cdot (g \circ f)\,.$$

b) Zeige durch ein Beispiel, dass die Gleichheit
$$(h \circ g) \cdot f \;=\; (h \cdot f) \circ (g \cdot f)$$
nicht gelten muss.

Lösung

a) Die Gleichheit von Funktionen bedeutet die Gleichheit für jedes Argument. Für $x \in \mathbb{R}$ ist
$$\begin{aligned} ((h \cdot g) \circ f)\,(x) &= (h \cdot g)\,(f(x)) \\ &= h(f(x)) \cdot g(f(x)) \\ &= (h \circ f)\,(x) \cdot (g \circ f)\,(x) \\ &= ((h \circ f) \cdot (g \circ f))\,(x), \end{aligned}$$
was die Aussage beweist.

b) Wir nehmen für f, g, h jeweils die Identität, also die Abbildung $x \mapsto x$. Die Verknüpfung der Identität mit sich selbst ist wieder die Identität. Das

Produkt der Identität mit sich selbst ist das Quadrieren $x \mapsto x^2$. Daher ist in diesem Beispiel die Funktion

$$(h \circ g) \cdot f$$

gleich der Quadrierungsfunktion. Die Funktion

$$(h \cdot f) \circ (g \cdot f)$$

hingegen ist die Hintereinanderschaltung des Quadrierens mit dem Quadrieren, und das ist die Abbildung $x \mapsto (x^2)^2 = x^4$.

Aufgabe 4. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, ausgehend von den Axiomen für einen angeordneten Körper, dass

$$1 > 0$$

gilt.

Lösung

Es gibt nur die drei sich ausschließenden Möglichkeiten

$$1 > 0 \text{ oder } 1 = 0 \text{ oder } 1 < 0\,.$$

Aufgrund der Körperaxiome ist $1 \neq 0$. Wir müssen also nur noch die Möglichkeit $1 < 0$ zum Widerspruch führen. Nehmen wir $1 < 0$ an. Aufgrund der Verträglichkeit mit der Addition kann man beidseitig -1 addieren und erhält

$$0 < -1\,.$$

Aufgrund der Verträglichkeit mit der Multiplikation mit positiven Elementen kann man diese Abschätzung mit -1 multiplizieren und erhält

$$0 \;=\; 0(-1) \;<\; (-1)(-1) \;=\; 1,$$

also ist zugleich $1 > 0$, ein Widerspruch.

Aufgabe 5. Berechne die Summe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n .$$

Lösung

Mit der Formel für die geometrische Reihe ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{5-2} = \frac{5}{3}.$$

Ferner ist

$$\sum_{n=0}^{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{25+10+4}{25} = \frac{39}{25}.$$

Also ist insgesamt

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{5}{3} - \frac{39}{25} = \frac{125-117}{75} = \frac{8}{75}.$$

Aufgabe 6. Beweise den Satz über das angenommene Maximum einer Funktion

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Lösung

Nach dem Zwischenwertsatz wissen wir, dass das Bild $J := f([a,b])$ ein Intervall ist.

Wir zeigen zunächst, dass J (nach oben und nach unten) beschränkt ist. Wir nehmen dazu an, dass J nicht nach oben beschränkt ist. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in I mit $f(x_n) \geq n$. Nach Satz 7.7 besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Da $[a,b]$ abgeschlossen ist, gehört der Grenzwert der Teilfolge zu $[a,b]$. Wegen der Stetigkeit muss dann auch die Bildfolge konvergieren. Die Bildfolge ist aber unbeschränkt, so dass sie nach Fakt ***** nicht konvergieren kann, und sich ein Widerspruch ergibt.

Sei nun y das Supremum von J. Es gibt eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in J, die gegen das Supremum konvergiert. Nach Definition von J gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f(x_n) = y_n$. Für diese Folge gibt es wieder nach Satz 7.7 eine konvergente Teilfolge. Es sei x der Grenzwert dieser Teilfolge. Somit ist aufgrund der Stetigkeit $f(x) = y$ und daher $y \in J$.

Aufgabe 7. Berechne das Cauchy-Produkt bis zur vierten Potenz der geometrischen Reihe mit der Exponentialreihe.

Lösung

Die geometrische Reihe ist $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ und die Exponentialreihe ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$. Das Cauchy-Produkt von zwei Reihen ergibt sich einfach dadurch, dass man jeden Summanden mit jedem Summanden multipliziert und gleiche Potenzen aufsummiert. Daher können die Potenzen x^5, x^6, etc. ignoriert werden und es ist

$$\begin{aligned}
& (1+x+x^2+x^3+x^4)\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4\right) \\
= & \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4\right)+\left(x+x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^4\right)+\left(x^2+x^3+\frac{1}{2}x^4\right)+x^3+x^4+x^4+\ldots \\
= & 1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+\frac{65}{24}x^4+\ldots.
\end{aligned}$$

Das Cauchy-Produkt bis zur vierten Potenz der beiden Reihen ist also

$$1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+\frac{65}{24}x^4\,.$$

Aufgabe 8. Beweise die Produktregel für differenzierbare Funktionen unter Verwendung der Regel

$$\left(f^2\right)' = 2f \cdot f'$$

mit Hilfe von

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right).$$

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned}
(fg)' &= \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)' \\
&= \frac{1}{4}\left(2(f+g)(f+g)' - 2(f-g)(f-g)'\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((f+g)(f'+g') - (f-g)(f'-g')\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(ff' + fg' + gf' + gg' - ff' + fg' + gf' - gg'\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2gf' + 2fg'\right) \\
&= gf' + fg'.
\end{aligned}$$

Aufgabe 9. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \frac{\ln\,(2x^2)}{7^x}.$$

Lösung

Wir verwenden die Darstellung $7^x = e^{x\,\ln(7)}$. Aufgrund der Quotientenregel und der Kettenregel ist

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{\ln(2x^2)}{e^{x\,\ln(7)}}\right)' \\
&= \frac{e^{x\,\ln(7)}\frac{1}{2x^2}4x - \ln(2x^2)\,\ln(7)e^{x\,\ln(7)}}{(e^{x\,\ln(7)})^2} \\
&= \frac{2e^{x\,\ln(7)}x^{-1} - \ln(2x^2)\,\ln(7)e^{x\,\ln(7)}}{e^{2x\,\ln(7)}} \\
&= \frac{2e^{x\,\ln(7)} - x\,\ln(2x^2)\,\ln(7)e^{x\,\ln(7)}}{xe^{2x\,\ln(7)}} \\
&= \frac{2 - x\,\ln(2x^2)\,\ln(7)}{x7^x}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 10. Wir betrachten eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form

$$f(x) = g(x)\,\sin x + h(x)\,\cos x\,,$$

wobei g und h lineare Polynome seien. Zeige durch Induktion, dass für die Ableitungen ($n \geq 0$) die Beziehung

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{n/2}\left((g(x)+nh'(x)) \sin x + (-ng'(x)+h(x)) \cos x\right) & \text{für } n \text{ gerade,} \\ (-1)^{(n-1)/2}\left((ng'(x)-h(x)) \sin x + (g(x)+nh'(x)) \cos x\right) & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

gilt.

Lösung

Zum Induktionsanfang betrachten wir $n = 0$, es geht also um die Funktion selbst. Wegen

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \sin x + h(x) \cos x \\ &= (-1)^0 \left((g(x)+0h'(x)) \sin x + (-0g'(x)+h(x)) \cos x\right) \end{aligned}$$

ist die Formel für $n = 0$ gerade richtig.

Wir beweisen nun nun die Formel für $n+1$ unter der Induktionsvoraussetzung, dass sie für alle kleinere Zahlen richtig ist. Sei zunächst $n+1$ ungerade, also n gerade. Dann ist (unter Verwendung der Tatsache, dass die zweiten Ableitungen von g und h gleich 0 sind)

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\ &= (-1)^{n/2}\left(\left(g(x)+nh'(x)\right) \sin x + \left(-ng'(x)+h(x)\right) \cos x\right)' \\ &= (-1)^{n/2}\left(g'(x) \sin x + \left(g(x)+nh'(x)\right) \cos x + h'(x) \cos x - \left(-ng'(x)+h(x)\right) \sin x\right) \\ &= (-1)^{n/2}\left(\left(g'(x)+ng'(x)-h(x)\right) \sin x + \left(g(x)+nh'(x)+h'(x)\right) \cos x\right) \\ &= (-1)^{(n+1)-1/2}\left(\left((n+1)g'(x)-h(x)\right) \sin x + \left(g(x)+(n+1)h'(x)\right) \cos x\right), \end{aligned}$$

so dass der Ausdruck für $n+1$ ungerade vorliegt.

Bei $n+1$ gerade, also n ungerade, ist

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\ &= (-1)^{(n-1)/2}\left(\left(ng'(x)-h(x)\right) \sin x + \left(g(x)+nh'(x)\right) \cos x\right)' \\ &= (-1)^{(n-1)/2}\left(-h'(x) \sin x + \left(ng'(x)-h(x)\right) \cos x + g'(x) \cos x - \left(g(x)+nh'(x)\right) \sin x\right) \\ &= (-1)^{(n-1)/2}\left(\left(-g(x)-(n+1)h'(x)\right) \sin x + \left((n+1)g'(x)-h(x)\right) \cos x\right) \\ &= (-1)^{(n-1)/2}(-1)\left(\left(g(x)+(n+1)h'(x)\right) \sin x + \left(-(n+1)g'(x)+h(x)\right) \cos x\right) \\ &= (-1)^{(n+1)/2}\left(\left(g(x)+(n+1)h'(x)\right) \sin x + \left(-(n+1)g'(x)+h(x)\right) \cos x\right), \end{aligned}$$

so dass der Ausdruck für $n+1$ gerade vorliegt.

Aufgabe 11. Zeige, dass die Funktion $f(x) = x + \sin x$ streng wachsend ist.

Lösung

Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = 1 + \cos x\,.$$

Wegen

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

ist $f'(x) \geq 0$, und da der Kosinus nur bei reellen Zahlen der Form $\pi + n2\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) den Wert -1 besitzt, besitzt f' nur dort eine Nullstelle. Nach Satz 19.5 (2) (angewendet auf ein beliebiges beschränktes Teilintervall) ist die Funktion streng wachsend.

Aufgabe 12. Bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t) = t^2 e^{-t}.$$

Lösung

Die erste Ableitung ist

$$f'(t) = \left(2t - t^2\right) e^{-t} = t\,(2-t)\, e^{-t}\,,$$

deren Nullstellen sind 0 und 2. Die zweite Ableitung ist

$$f''(t) = \left(t^2 - 4t + 2\right) e^{-t}\,,$$

so dass $f''(0) > 0$ und $f''(2) < 0$ ist. Daher liegt in 0 ein (isoliertes) lokales Minimum mit dem Wert $f(0) = 0$ und in 2 ein (isoliertes) lokales Maximum mit dem Wert $4 \cdot e^{-2}$ vor. Da für $t \neq 0$ sowohl t^2 als auch e^{-t} positiv sind, liegt in 0 auch das globale Minimum vor. Für $t \to -\infty$ wächst die Funktion hingegen gegen $+\infty$, sodass in 2 kein globales Maximum vorliegt.

Aufgabe 13. Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ die Abschätzung

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \ln 2$$

gilt. Tipp: Betrachte die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $]0,1]$.

Lösung

Die Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$ ist $\ln x$. Daher ist $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$. Die äquidistante Unterteilung von $[1,2]$ in n Teilintervalle führt zu den Teilungspunkten

$$1 + \frac{i}{n}, i = 0, \ldots, n.$$

Da $\frac{1}{x}$ streng fallend ist, ist die Treppenfunktion, die auf dem Intervall $]1 + \frac{i-1}{n}, 1 + \frac{i}{n}[$ den Wert

$$f(1 + \frac{i}{n}) = \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} = \frac{n}{n+i}$$

annimmt, eine untere Treppenfunktion zu f. Das Treppenintegral zu dieser Treppenfunktion ist

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n},$$

und dies ist maximal gleich dem bestimmten Integral.

Aufgabe 14. Es sei

$$f(x) = \frac{x^3+7x^2-5x+4}{x^2-3}.$$

a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von $f(x)$.

b) Bestimme eine Stammfunktion von $f(x)$.

Lösung

a) Division mit Rest ergibt

$$x^3+7x^2-5x+4 = (x^2-3)(x+7)-2x+25.$$

Daher ist

$$\frac{x^3+7x^2-5x+4}{x^2-3} = x+7+\frac{-2x+25}{x^2-3}.$$

Wegen $x^2-3 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ machen wir den Ansatz

$$\frac{-2x+25}{x^2-3} = \frac{a}{x-\sqrt{3}}+\frac{b}{x+\sqrt{3}}.$$

Dies führt auf

$$\begin{aligned} -2x+25 &= a(x+\sqrt{3})+b(x-\sqrt{3}) \\ &= (a+b)x+(a-b)\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Somit ist $a+b=-2$ und $a-b=\frac{25}{\sqrt{3}}$, woraus sich $2a=-2+\frac{25}{\sqrt{3}}$ und $2b=-2-\frac{25}{\sqrt{3}}$ ergibt. Also ist

$$a=-1+\frac{25}{2\sqrt{3}} \text{ und } b=-1-\frac{25}{2\sqrt{3}}.$$

Somit ist die Partialbruchzerlegung gleich

$$\frac{x^3+7x^2-5x+4}{x^2-3} = x+7+\frac{-1+\frac{25}{2\sqrt{3}}}{x-\sqrt{3}}+\frac{-1-\frac{25}{2\sqrt{3}}}{x+\sqrt{3}}.$$

b) Eine Stammfunktion zu $f(x)$ ist (auf dem Definitionsbereich)

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2+7x+\left(-1+\frac{25}{2\sqrt{3}}\right)\ln\left|x-\sqrt{3}\right|+\left(-1-\frac{25}{2\sqrt{3}}\right)\ln\left|x+\sqrt{3}\right|.$$

Aufgabe 15. a) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{t^2}{y},\ y > 0,\ t > 0\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

b) Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{t^2}{y} \text{ mit } y(4) = 5\,.$$

Lösung

a) Wir setzen $g(t) = t^2$ und $h(y) = \frac{1}{y}$. Eine Stammfunktion von $g(t)$ ist $G(t) = \frac{1}{3}t^3$ und eine Stammfunktion von $\frac{1}{h(y)} = y$ ist

$$H(y) = \frac{1}{2}y^2.$$

Die Umkehrfunktion von H ist

$$H^{-1}(z) = \sqrt{2}\sqrt{z}.$$

Daher ist

$$y(t) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}t^3} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot t^{\frac{3}{2}}$$

eine Lösung der Differentialgleichung.

b) Wir machen den Ansatz $H(y) = \frac{1}{2}y^2 + c$ mit der Umkehrfunktion

$$H^{-1}(z) = \sqrt{2z - 2c},$$

was zur Lösung(sschar)

$$y(t) = \sqrt{\frac{2}{3}t^3 - 2c}$$

führt. Aus

$$5 = y(4) = \sqrt{\frac{2}{3}4^3 - 2c}$$

folgt

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}4^3 - 25\right) \\ &= \frac{128 - 75}{6} \\ &= \frac{53}{6} \end{aligned}$$

Also ist

$$y(t) = \sqrt{\frac{2}{3}t^3 - \frac{53}{3}}$$

die Lösung des Anfangswertproblems.