Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

10. Beispielklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	5	3	3	8	4	3	2	5	3	4	5	6	5	64
erhaltene Pkt.:																

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *injektive* Abbildung
$$f\colon M \longrightarrow N.$$
(2) Eine *Cauchy-Folge* in $\mathbb{R}$.
(3) Die *Supremumsnorm* einer Funktion
$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einer Menge T.
(4) Der *natürliche Logarithmus*
$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$
(5) Die *Ableitungsfunktion* zu einer differenzierbaren Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
(6) Das *bestimmte Integral* zu einer Riemann-integrierbaren Funktion
$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$
(7) Die *Lösung eines Anfangswertproblems*
$$y' = f(t,y) \text{ und } y(t_0) = y_0 \,,$$
zu einer Funktion
$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$
(8) Eine gewöhnliche Differentialgleichung mit *getrennten Variablen.*

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Satz über die Eindeutigkeit des Limes* in einem angeordneten Körper K.
(2) Der *Satz über die Anzahl von Nullstellen eines Polynoms* über einem Körper K.
(3) Der *Satz über die stetige Umkehrfunktion.*
(4) Die *Newton-Leibniz Formel.*

AUFGABE 3. (5 (2+3) Punkte)

Es seien
$$f,g,h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
Funktionen.

a) Zeige die Gleichheit
$$(h \cdot g) \circ f \,=\, (h \circ f) \cdot (g \circ f)\,.$$

b) Zeige durch ein Beispiel, dass die Gleichheit

$$(h \circ g) \cdot f \; = \; (h \cdot f) \circ (g \cdot f)$$

nicht gelten muss.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, ausgehend von den Axiomen für einen angeordneten Körper, dass

$$1 > 0$$

gilt.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Berechne die Summe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n .$$

Aufgabe 6. (8 Punkte)

Beweise den Satz über das angenommene Maximum einer Funktion

$$f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Berechne das Cauchy-Produkt bis zur vierten Potenz der geometrischen Reihe mit der Exponentialreihe.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Beweise die Produktregel für differenzierbare Funktionen unter Verwendung der Regel

$$\left(f^2\right)' \; = \; 2f \cdot f'$$

mit Hilfe von

$$fg \; = \; \frac{1}{4} \left((f+g)^2 - (f-g)^2 \right) .$$

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f \colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto f(x) = \frac{\ln\,(2x^2)}{7^x}.$$

Aufgabe 10. (5 Punkte)

Wir betrachten eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form

$$f(x) \;=\; g(x)\,\sin\, x\, + h(x)\,\cos\, x\,,$$

wobei g und h lineare Polynome seien. Zeige durch Induktion, dass für die Ableitungen ($n \geq 0$) die Beziehung

$$f^{(n)}(x) \;=\; \begin{cases} (-1)^{n/2}\,((g(x) + nh'(x))\,\sin\, x\, + (-ng'(x) + h(x))\,\cos\, x\,) & \text{für } n \text{ gerade,} \\ (-1)^{(n-1)/2}\,((ng'(x) - h(x))\,\sin\, x\, + (g(x) + nh'(x))\,\cos\, x\,) & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

gilt.

Aufgabe 11. (3 Punkte)

Zeige, dass die Funktion $f(x) = x + \sin\, x$ streng wachsend ist.

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f\colon\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t) = t^2 e^{-t}.$$

Aufgabe 13. (5 Punkte)

Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ die Abschätzung

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \;\leq\; \ln\, 2$$

gilt. Tipp: Betrachte die Funktion $f(x) \;=\; \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $]0, 1]$.

Aufgabe 14. (6 (5+1) Punkte)

Es sei

$$f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3}\,.$$

a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von $f(x)$.

b) Bestimme eine Stammfunktion von $f(x)$.

Aufgabe 15. (5 (2+3) Punkte)

a) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{t^2}{y},\; y > 0,\; t > 0\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

b) Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{t^2}{y} \text{ mit } y(4) = 5\,.$$