Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

1. Beispielklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	4	3	7	8	4	5	3	3	4	2	8	5	64
erhaltene Pkt.:															

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Das *Bild* einer Abbildung
$$F\colon\ L \longrightarrow M.$$
(2) Eine *Cauchy-Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K.
(3) Die *Gaußklammer* $\lfloor x\rfloor$ zu einem Element $x \in K$ in einem archimedisch angeordneten Körper K.
(4) Die *Gleichmächtigkeit* von zwei Mengen L und M.
(5) Die *Stetigkeit in einem Punkt* $a \in \mathbb{K}$ einer Abbildung $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.
(6) Die *Differenzierbarkeit in einem Punkt* $a \in \mathbb{K}$ einer Abbildung $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.
(7) Eine *Stammfunktion* einer Abbildung $f : D \to \mathbb{K}$ auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{K}$.
(8) Die *Lösung* zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung
$$y' = f(t, y)\,,$$
wobei
$$f\colon\ U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$
eine Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Das *Leibnizkriterium für alternierende Reihen.*
(2) Das *Folgenkriterium* für die Stetigkeit einer Funktion
$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
(3) Das *Additionstheorem* für den Sinus.
(4) Der *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* für eine stetige Funktion
$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Es seien x, y reelle Zahlen. Zeige, dass
$$x - \lfloor x\rfloor\ =\ y - \lfloor y\rfloor$$
genau dann gilt, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $y = x + n$ gibt.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Entscheide, ob die reelle Folge

$$x_n = \frac{5n^{\frac{3}{2}} + 4n^{\frac{4}{3}} + n}{7n^{\frac{5}{3}} + 6n^{\frac{3}{2}}}$$

(mit $n \geq 1$) in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 5. (7 Punkte)

Beweise das Folgenkriterium für die Stetigkeit einer Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6. (8 Punkte)

Zeige, dass es stetige Funktionen

$$f, g \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R},$$

mit $fg = 0$ derart gibt, dass für alle $\delta > 0$ weder $f|_{[0,\delta]}$ noch $g|_{[0,\delta]}$ die Nullfunktion ist.

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Wir betrachten das Polynom

$$f(x) = x^4 - x^3 + 5x + 2 \in \mathbb{C}[X]\,.$$

Bestimme die x-Koordinaten sämtlicher Schnittpunkte der Tangente an f im Punkt $x = 1$ mit dem Graphen von f.

Aufgabe 8. (5 Punkte)

Wir betrachten die durch

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

definierte Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Zeige, dass es zu jedem λ, $-1 \leq \lambda \leq 1$, eine Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+$ derart gibt, dass die Folge der Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n}$$

gegen λ konvergiert.

AUFGABE 9. (3 Punkte)

Bestimme für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x ,$$

die Extrema.

AUFGABE 10. (3 Punkte)

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

AUFGABE 11. (4 Punkte)

Die beiden lokalen Extrema der Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

definieren ein achsenparalleles Rechteck, das vom Funktionsgraphen in zwei Bereiche zerlegt wird. Bestimme deren Flächeninhalte.

AUFGABE 12. (2 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 2x^3 + 3e^x - \sin x ,$$

über $[-1, 0]$.

AUFGABE 13. (8 (4+1+3) Punkte)

a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{4s}{s^4 - 2s^2 + 1} .$$

b) Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{4s}{s^4 - 2s^2 + 1} .$$

c) Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{\sinh^2 t} .$$

Aufgabe 14. (5 (3+2) Punkte)

a) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{t^3}{y^2},\ y > 0,\ t > 0\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

b) Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{t^3}{y^2} \text{ mit } y(1) = 1\,.$$