Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 5

Aufgaben

Aufgabe 5.1. Seien R und S kommutative Ringe und sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in S. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal in R ist.

Zeige durch ein Beispiel, dass das Urbild eines maximalen Ideales kein maximales Ideal sein muss.

Aufgabe 5.2. Zeige, dass die Spektrumsabbildung zur Reduktion

$$R \longrightarrow R/\mathfrak{n}_R$$

eines kommutativen Ringes R eine Homöomorphie ist.

Aufgabe 5.3. Beschreibe das Spektrum Spek $(R_{\mathfrak{p}})$ einer Lokalisierung eines kommutativen Ringes R an einem Primideal $\mathfrak{p}$.

Aufgabe 5.4.*

Bestimme für die Ringerweiterung

$$\mathbb{Z} \subseteq R = \mathbb{Z}[X]/\big(X^3 + 2X - 1\big)$$

die Faserringe zu den Primzahlen $p = 2, 3, 5, 11$. Bestimme insbesondere, ob sie reduziert sind, ob ein Körper vorliegt, wie viele Primideale sie enthalten und wie die Restekörper aussehen.

Zur vorstehenden Aufgabe vergleiche auch Aufgabe 18.9.

Aufgabe 5.5. Sei $R = \mathbb{Z}[X]/(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$. Bestimme die Primideale in R, die über den Primzahlen $p = 2, 3, 5, 7$ liegen.

Aufgabe 5.6. Es sei R ein kommutativer Ring. Bestimme die Fasern zur Spektrumsabbildung zur Ringerweiterung $R \subseteq R[X_1, \ldots, X_n]$.

Aufgabe 5.7.*

Sei K ein Körper und seien R und S integre, endlich erzeugte K-Algebren. Es sei

$$\varphi\colon\ R \longrightarrow S$$

ein K-Algebrahomomorphismus und $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal in S mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$. Die Abbildung induziere einen Isomorphismus $R_\mathfrak{m} \to S_\mathfrak{n}$. Zeige, dass es dann auch ein $f \in R$, $f \notin \mathfrak{m}$, gibt derart, dass $R_f \to S_{\varphi(f)}$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 5.8. Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal mit Lokalisierung $R_\mathfrak{m}$. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal, dass unter der Lokalisierungsabbildung zum Kern gehört. Zeige, dass dann $R_\mathfrak{m}$ auch eine Lokalisierung von $R/\mathfrak{a}$ ist.

Aufgabe 5.9. Bestimme die Fasern der Spektrumsabbildung zu $\mathbb{R}[X] \subseteq \mathbb{C}[X]$.

Aufgabe 5.10. Bestimme die Fasern der Spektrumsabbildung zu $\mathbb{Q}[X] \subseteq \mathbb{R}[X]$. Welche sind endlich?

Aufgabe 5.11. Seien R und A kommutative Ringe. Zeige, dass A genau dann eine R-Algebra ist, wenn A ein R-Modul ist, für den zusätzlich

$$r(ab) = (ra)b \text{ für alle } r \in R,\ a, b \in A$$

gilt.

Aufgabe 5.12. Sei G eine kommutative Gruppe. Zeige, dass G auf genau eine Weise die Struktur eines $\mathbb{Z}$-Moduls trägt. Kommutative Gruppen und $\mathbb{Z}$-Moduln sind also äquivalente Objekte.

Aufgabe 5.13.*

Es sei V ein Modul über dem kommutativen Ring R. Es seien $s_1, \ldots, s_k \in R$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeige

$$\left(\sum_{i=1}^{k} s_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} v_j\right) = \sum_{1 \leq i \leq k,\, 1 \leq j \leq n} s_i \cdot v_j .$$

Aufgabe 5.14. Sei R ein kommutativer Ring, M und N zwei R-Moduln und sei

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow N$$

ein Modulhomomorphismus. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Für einen R-Untermodul $S \subseteq M$ ist auch das Bild $\varphi(S)$ ein Untermodul von N.
(2) Insbesondere ist das Bild $\operatorname{bild}\varphi = \varphi(M)$ der Abbildung ein Untermodul von N.
(3) Für einen Untermodul $T \subseteq N$ ist das Urbild $\varphi^{-1}(T)$ ein Untermodul von M.
(4) Insbesondere ist der Kern $\varphi^{-1}(0)$ ein Untermodul von M.

Aufgabe 5.15.*

Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Zeige, dass L ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 5.16.*

Bestimme den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Aufgabe 5.17. Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad 1. Zeige, dass $L = K$ ist.

Aufgabe 5.18. Es sei L ein Körper und sei

$$\varphi\colon\ L \longrightarrow L$$

ein Automorphismus. Zeige, dass die Einschränkung von φ auf den Primkörper von L die Identität ist.

Aufgabe 5.19. Bestimme in $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ das Inverse von $2 + 5\sqrt{7}$.

Aufgabe 5.20. Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und seien $v_1, \ldots, v_n \in L$ Elemente, die eine K-Basis von L bilden. Sei $x \in L$, $x \neq 0$. Zeige, dass auch $xv_1, \ldots, xv_n \in L$ eine K-Basis von L bilden.

Aufgabe 5.21.*

Es sei K ein Körper mit einer Charakteristik $\neq 2$ und es sei $K \subset L$ eine quadratische Körpererweiterung. Zeige, dass es dann ein $x \in L$, $x \notin K$, mit $x^2 \in K$ gibt.

AUFGABE 5.22. Es sei $\mathbb{C} \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige $\mathbb{C} = L$.

AUFGABE 5.23.*

Beweise die „Gradformel“ für eine Kette von endlichen Körpererweiterungen $K \subseteq L \subseteq M$.

AUFGABE 5.24. Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung vom Grad p, wobei p eine Primzahl sei. Es sei $x \in L$, $x \notin K$. Zeige, dass $K[x] = L$ ist.

AUFGABE 5.25. Bestimme den Grad von
$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{5}, \sqrt[3]{2}].$$

AUFGABE 5.26.*

Zeige, dass es zu jeder natürlichen Zahl n eine Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L$ vom Grad n gibt.

AUFGABE 5.27. Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei $x_1, \ldots, x_n \in L$ eine K-Basis von L. Zeige, dass die Multiplikation auf L durch die Produkte
$$x_i x_j, 1 \leq i \leq j \leq n,$$
eindeutig festgelegt ist.

AUFGABE 5.28. Es seien $\mathbb{Q} \subseteq K \subset \mathbb{C}$ und $\mathbb{Q} \subseteq L \subset \mathbb{C}$ zwei endliche Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ vom Grad d bzw. e. Es seien d und e teilerfremd. Zeige, dass dann
$$K \cap L = \mathbb{Q}$$
ist.

AUFGABE 5.29. Zeige, dass man $\sqrt{3}$ nicht als $\mathbb{Q}$-Linearkombination von 1 und $\sqrt{2}$ schreiben kann.

AUFGABE 5.30. Sei K ein Körper und sei p eine Primzahl. Es sei $a \in K$ ein Element, das in K keine p-te Wurzel besitzt. Zeige, dass das Polynom $X^p - a$ irreduzibel ist.

Aufgabe 5.31.*

Das Polynom $F = X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel und definiert daher eine Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[X]/\big(X^3 - 3X + 1\big) =: L$$

vom Grad 3. Die Restklasse von X in L sei mit α bezeichnet. Zeige, dass auch die Elemente aus L

$$\beta = \alpha^2 - 2$$

und

$$\gamma = -\alpha^2 - \alpha + 2$$

Nullstellen von F sind.

Aufgabe 5.32.*

Es sei K ein Körper und $K \subseteq L$ eine Ringerweiterung vom Grad zwei. Zeige, dass es dann die folgenden drei Möglichkeiten gibt.

(1) L ist ein Körper.
(2) L ist von der Form $L = K[\epsilon]/\epsilon^2$.
(3) L ist der Produktring $L = K \times K$.

Aufgabe 5.33. Zeige, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ nicht endlich ist.

Aufgabe 5.34.*

Es sei M die Menge aller Zwischenkörper zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{C}$. Für Körper $K_1, K_2 \in M$ setzen wir $K_1 \sim K_2$, falls es einen Körper $L \in M$ mit $K_1 \subseteq L$ und $K_2 \subseteq L$ endlich gibt.

(1) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
(2) Ist $\mathbb{R} \sim \mathbb{C}$?
(3) Ist $\mathbb{Q} \sim \mathbb{C}$?

Aufgabe 5.35. Zeige, dass die Körpererweiterung $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}(X)$, wobei $\mathbb{R}(X)$ den Körper der rationalen Funktionen bezeichnet, nicht endlich ist.

Aufgabe 5.36. Sei R ein kommutativer Ring mit endlich vielen Elementen. Zeige, dass R genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn R ein Körper ist.

Aufgabe 5.37. Sei R ein kommutativer Ring, der einen Körper der positiven Charakteristik $p > 0$ enthalte (dabei ist p eine Primzahl). Zeige, dass die Abbildung

$$R \longrightarrow R,\ f \longmapsto f^p,$$

ein Ringhomomorphismus ist, den man den *Frobeniushomomorphismus* nennt.

Aufgabe 5.38. Sei R ein kommutativer Ring, der einen Körper der positiven Charakteristik $p > 0$ enthalte. Zeige, dass die e-te Hintereinanderschaltung des Frobeniushomomorphismus

$$F\colon\ R \longrightarrow R,\ f \longmapsto f^p,$$

durch $f \mapsto f^q$ mit $q = p^e$ gegeben ist.

Aufgabe 5.39. Es sei R ein kommutativer Ring der positiven Charakteristik $p > 0$. Zeige, dass die Spektrumsabbildung zum Frobeniushomomorphismus

$$R \longrightarrow R,\ f \longmapsto f^p,$$

eine Homöomorphie ist.

Aufgabe 5.40. Bestimme die Matrix des Frobeniushomomorphismus

$$\Phi\colon\ \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{F}_q$$

bezüglich einer geeigneten $\mathbb{F}_p$-Basis von $\mathbb{F}_q$ für $p = 2$ und $q = 4$ bzw. $q = 8$.

Aufgabe 5.41. Es sei p eine Primzahl mit $p = 3 \mod 4$ und sei

$$\mathbb{Z}/(p) \subseteq \mathbb{Z}/(p)[\mathrm{i}] = \mathbb{Z}/(p)[X]/X^2 + 1) = \mathbb{F}_{p^2}$$

die quadratische Körpererweiterung von $\mathbb{Z}/(p)$. Zeige, dass die Konjugation $\mathrm{i} \mapsto -\mathrm{i}$ mit dem Frobeniushomomorphismus $f \mapsto f^p$ übereinstimmt.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7