Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 4

Aufgaben

AUFGABE 4.1. Es sei R ein kommutativer Ring und I ein Ideal. Zeige, dass $\{1+x \mid x \in I\}$ ein multiplikatives System in R ist.

AUFGABE 4.2.*

Es sei R ein kommutativer Ring, $S \subseteq R$ ein multiplikatives System und $I \subseteq R$ ein Ideal. Zeige, dass

$$J := \{f \in R \mid \text{Es gibt ein } s \in S \text{ mit } sf \in I\}$$

ein Ideal in R ist, dass I umfasst.

AUFGABE 4.3. Es sei $Y \subseteq \mathbb{R}$ eine fixierte Teilmenge. Zeige, dass die Menge

$$S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig, } f \text{ besitzt in } T \text{ keine Nullstelle}\}$$

ein multiplikatives System im Ring der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ ist.

Ein multiplikatives System S in einem kommutativen Ring R heißt *saturiert*, wenn folgendes gilt: Ist $g \in R$ und gibt es ein $f \in S$, das von g geteilt wird, so ist auch $g \in S$.

Sei R ein kommutativer Ring. Ein multiplikatives System $F \subseteq R$ nennt man einen *Ultrafilter*, wenn $0 \notin F$ ist und wenn F maximal mit dieser Eigenschaft ist.

AUFGABE 4.4. Es sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass die Menge der Nichtnullteiler in R ein saturiertes multiplikatives System bilden.

AUFGABE 4.5. Seien A, B kommutative Ringe und sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus . Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(B^\times)$ der Einheitengruppe ein saturiertes multiplikatives System in A ist.

AUFGABE 4.6. Es sei R ein kommutativer Ring und sei $F \subseteq R$ ein multiplikatives System mit $0 \notin F$. Zeige, dass F genau dann ein Ultrafilter ist, wenn es zu jedem $g \in R$, $g \notin F$, ein $f \in F$ und eine natürliche Zahl n mit $fg^n = 0$ gibt.

AUFGABE 4.7. Sei R ein kommutativer Ring und sei $F \subset R$ ein Ultrafilter. Zeige, dass das Komplement von F ein minimales Primideal in R ist.

AUFGABE 4.8. Es sei R ein kommutativer Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und $M \subseteq R$ ein multiplikatives System mit $\mathfrak{a} \cap M = \emptyset$. Zeige mit dem Lemma von Zorn, dass es dann auch ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ und mit $\mathfrak{p} \cap M = \emptyset$ gibt.

AUFGABE 4.9. Es sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass die Überkreuzrelation auf der Produktmenge $R \times S$ eine Äquivalenzrelation ist, und dass für die Äquivalenzklassen $\frac{r}{s} := [(r, s)]$ durch

$$\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} := \frac{rs' + r's}{ss'}$$

eine wohldefinierte Addition und durch

$$\frac{r}{s} \cdot \frac{r'}{s'} := \frac{rr'}{ss'}$$

eine wohldefinierte Multiplikation gegeben ist, derart, dass die Quotientenmenge ein kommutativer Ring wird.

AUFGABE 4.10. Es sei R ein Integritätsbereich und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System, $0 \notin S$.

(1) Zeige, dass die Nenneraufnahme zu S, also R_S mit

$$R_S := \left\{ \frac{f}{g} \mid f \in R,\, g \in S \right\} \subseteq Q(R)$$

ein Unterring von $Q(R)$ ist.

(2) Zeige, dass nicht jeder Unterring von $Q(R)$ eine Nenneraufnahme ist.

AUFGABE 4.11. Es sei $T \subseteq \mathbb{P}$ eine Teilmenge der Primzahlen. Zeige, dass die Menge

$$R_T = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \text{ lässt sich mit einem Nenner schreiben, in dem nur Primzahlen aus } T \text{ vorkommen}\}$$

ein Unterring von $\mathbb{Q}$ ist. Was ergibt sich bei $T = \emptyset$, $T = \{3\}$, $T = \{2, 5\}$, $T = \mathbb{P}$?

Aufgabe 4.12. Es sei $R = \mathbb{Z}[\frac{2}{3}]$ der von $\mathbb{Z}$ und $2/3$ erzeugte Unterring von $\mathbb{Q}$. Zeige, dass R alle rationalen Zahlen enthält, die sich mit einer Potenz von 3 im Nenner schreiben lassen.

Aufgabe 4.13. Sei R ein kommutativer Ring und sei $f \in R$ mit zugehöriger Nenneraufnahme R_f. Beweise die R-Algebraisomorphie

$$R_f \cong R[T]/(Tf - 1).$$

Aufgabe 4.14. Es sei R ein kommutativer Ring und $f, g \in R$ Elemente. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) Es ist $D(f) \subseteq D(g)$ (im Spektrum von R).
(2) Es ist $\operatorname{rad}((f)) \subseteq \operatorname{rad}((g))$.
(3) Es ist $f \in \operatorname{rad}((g))$.
(4) Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n \in (g)$
(5) Das Element g teilt eine Potenz von f.
(6) Es ist g eine Einheit in R_f.
(7) Es gibt einen R-Algebrahomomorphismus $R_g \to R_f$.

Aufgabe 4.15. Sei R ein kommutativer Ring, $f \in R$ ein Element und R_f die zugehörige Nenneraufnahme. Zeige, dass f genau dann nilpotent ist, wenn R_f der Nullring ist.

Aufgabe 4.16. Es sei R ein Hauptidealbereich mit Quotientenkörper $Q = Q(R)$. Zeige, dass jeder Zwischenring S, $R \subseteq S \subseteq Q$, eine Nenneraufnahme ist.

Aufgabe 4.17. Zeige, dass $\mathbb{Q}$ keine Algebra von endlichem Typ über $\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 4.18. Sei R ein Integritätsbereich und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass die Primideale in R_S genau denjenigen Primidealen in R entsprechen, die mit S einen leeren Durchschnitt haben.

Aufgabe 4.19. Sei R ein kommutativer Ring, sei $f \in R$ und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal. Zeige, dass $f \in \mathfrak{a}$ genau dann gilt, wenn für alle Lokalisierungen $R_{\mathfrak{p}}$ gilt, dass $f \in \mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}$ ist.

Aufgabe 4.20. Es sei R ein kommutativer Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass es eine natürliche Ringisomorphie

$$(R/\mathfrak{a})_S = R_S/\mathfrak{a}R_S$$

gibt, wobei links die Nenneraufnahme am Bild des multiplikativen Systems in $R/\mathfrak{a}$ bezeichnet.

Aufgabe 4.21. Es sei R ein kommutativer Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. In der Nenneraufnahme R_S gelte

$$\mathfrak{a}R_S = (f_1, \ldots, f_n).$$

Zeige, dass es ein $g \in S$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n \in R$ mit

$$\mathfrak{a}R_g = (a_1, \ldots, a_n)$$

gibt.

Aufgabe 4.22.*

Man gebe ein Beispiel einer integren, endlich erzeugten $\mathbb{C}$-Algebra R und eines multiplikativen Systems $S \subseteq R$, $0 \notin S$, an derart, dass die Nenneraufnahme R_S kein Körper ist, aber jedes maximale Ideal aus R zum Einheitsideal in R_S wird.

Aufgabe 4.23. Bestimme die Unterringe der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, die lokal sind.

Aufgabe 4.24. Sei R ein kommutativer Ring. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen.

(1) R hat genau ein maximales Ideal
(2) Die Menge der Nichteinheiten $R \setminus R^\times$ bildet ein Ideal in R.

Aufgabe 4.25. Sei R ein lokaler Ring mit Restekörper K. Zeige, dass R und K genau dann die gleiche Charakteristik haben, wenn R einen Körper enthält.

Aufgabe 4.26. Es sei R ein kommutativer Ring und

$$\varphi\colon R \longrightarrow K$$

ein Ringhomomorphismus in einen Körper K. Zeige, dass es eine eindeutig bestimmte Faktorisierung

$$R \longrightarrow \kappa(\mathfrak{p}) \longrightarrow K$$

mit einem Restekörper $\kappa(\mathfrak{p})$ zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ gibt.

Aufgabe 4.27.*

Es sei R ein lokaler Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R. Zeige, dass

$$R^{\times} \longrightarrow (R/\mathfrak{a})^{\times}$$

surjektiv ist.

Aufgabe 4.28. Es sei

$$\varphi\colon\ R \longrightarrow S$$

ein Ringhomomorphismus zwischen den kommutativen Ringen R und S und es sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(S)$ ein Primideal. Zeige, dass es natürliche Ringhomomorphismen

$$R_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \longrightarrow S_{\mathfrak{p}}$$

(zwischen den Lokalisierungen) und

$$\kappa\big(\varphi^{-1}(\mathfrak{p})\big) \longrightarrow \kappa(\mathfrak{p})$$

(zwischen den Restekörpern) gibt.

Aufgabe 4.29. Sei R ein kommutativer Ring, $S \subseteq R$ ein multiplikatives System und M ein R-Modul. Definiere die „Nenneraufnahme“

$$M_S$$

und zeige, dass sie ein R_S-Modul ist.

Abbildungsverzeichnis