Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 3

Übungsaufgaben

Die folgenden Aufgaben betrachten Ringeigenschaften am Beispiel von Ringen von stetigen Funktionen.

AUFGABE 3.1. Wir betrachten die Menge $R = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeige, dass R (mit naheliegenden Verknüpfungen) ein kommutativer Ring ist. Handelt es sich um einen Integritätsbereich?

AUFGABE 3.2. Zeige, dass es im Ring der stetigen Funktionen $R = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Nichtnullteiler gibt, die unendlich viele Nullstellen besitzen.

AUFGABE 3.3. Es sei M ein metrischer Raum und $R = C(M, \mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktion auf M. Zeige, dass zwei zueinander assoziierte Elemente $f, g \in R$ die gleiche Nullstellenmenge besitzen, und dass die Umkehrung nicht gelten muss.

AUFGABE 3.4.*

Zeige, dass es stetige Funktionen

$$f, g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R},$$

mit $fg = 0$ derart gibt, dass für alle $\delta > 0$ weder $f|_{[0,\delta]}$ noch $g|_{[0,\delta]}$ die Nullfunktion ist.

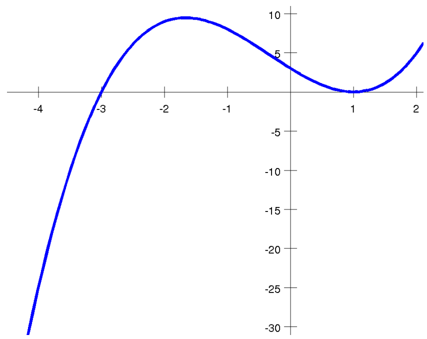
AUFGABE 3.5. Es seien X und Y topologische Räume und

$$\varphi\colon X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Zeige, dass dies einen Ringhomomorphismus

$$C(Y, \mathbb{R}) \longrightarrow C(X, \mathbb{R}),\ f \longmapsto f \circ \varphi,$$

induziert.



AUFGABE 3.6. Zeige, dass zu $a \in \mathbb{C}$ der Einsetzungshomomorphismus

$$\mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C},\ X \longmapsto a,$$

mit der Evaluationsabbildung (in den Restekörper $\mathbb{C}[X]_{(X-a)}/(X-a)\mathbb{C}[X]_{(X-a)}$) zum Primideal $(X-a)$ übereinstimmt.

AUFGABE 3.7. Es sei $f \in \mathbb{C}[X]$, $f \neq 0$, und $a \in \mathbb{C}$. Zeige, dass die folgenden „Ordnungen" von f an der Stelle a übereinstimmen.

(1) Die Verschwindungsordnung von f an der Stelle a, also die maximale Ordnung einer Ableitung mit $f^{(k)}(a) = 0$.
(2) Der Exponent des Linearfaktors $X - a$ in der Zerlegung von f.
(3) Die Ordnung von f an der Lokalisierung $\mathbb{C}[X]_{(X-a)}$ von $\mathbb{C}[X]$ am maximalen Ideal $(X - a)$.

AUFGABE 3.8. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $a \in K$ ein fixiertes Element. Bestimme den Kern des Einsetzungshomomorphismus

$$K[X] \longrightarrow K,\ X \longmapsto a.$$

AUFGABE 3.9. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $P \in K[X]$ ein nicht-konstantes Polynom. Zeige, dass der durch $X \mapsto P$ definierte Einsetzungshomomorphismus von $K[X]$ nach $K[X]$ injektiv ist und dass der durch P erzeugte Unterring $K[P] \subseteq K[X]$ isomorph zum Polynomring in einer Variablen ist.

AUFGABE 3.10. Es sei R ein kommutativer Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal in R. Zeige, dass I genau dann ein maximales Ideal ist, wenn der Restklassenring R/I ein Körper ist.

Aufgabe 3.11.*

Es sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$ sei nicht nilpotent. Zeige, dass es ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$ gibt.

Aufgabe 3.12. Sei R ein Integritätsbereich und sei $0 \neq p \in R$ keine Einheit. Dann ist p genau dann ein Primelement, wenn das von p erzeugte Ideal $(p) \subset R$ ein Primideal ist.

Aufgabe 3.13. Sei R ein kommutativer Ring und $p \in R$, $p \neq 0$. Zeige, dass p genau dann ein Primelement ist, wenn der Restklassenring $R/(p)$ ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 3.14. Sei R ein vom Nullring verschiedener kommutativer Ring. Zeige unter Verwendung des Lemmas von Zorn, dass es maximale Ideale in R gibt.

Aufgabe 3.15. Zeige, dass ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ in einem kommutativen Ring R ein Primideal ist.

Aufgabe 3.16. Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit dem Restklassenring $S = R/\mathfrak{a}$. Zeige, dass die Ideale von S eindeutig denjenigen Idealen von R entsprechen, die $\mathfrak{a}$ umfassen.

Zeige, dass das Gleiche für Primideale, Radikalideale und maximale Ideale gilt.

Aufgabe 3.17. Bestimme sämtliche Primkörper.

Aufgabe 3.18. Es sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass R genau dann der Nullring ist, wenn sein Spektrum $\operatorname{Spek}(R)$ leer ist.

Aufgabe 3.19.*

Zeige, dass die Zariski-Topologie auf dem Spektrum $\operatorname{Spek}(R)$ eines kommutativen Ringes R in der Tat eine Topologie ist.

Aufgabe 3.20.*

Beweise Proposition 3.16.

Aufgabe 3.21. Skizziere das Spektrum von $\mathbb{Z}/(p)[X]$ für verschiedene Primzahlen p.

Aufgabe 3.22. Skizziere das Spektrum von $\mathbb{Z}[X]$.

Abbildungsverzeichnis