Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 10

Aufgaben

Aufgabe 10.1. Sei R ein Zahlbereich und sei angenommen, dass jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, eine Primfaktorzerlegung in R besitzt. Zeige, dass dann R bereits faktoriell ist.

Aufgabe 10.2. Es sei $D \neq 0, 1$ quadratfrei und A_D der zugehörige quadratische Zahlbereich. Es Sei p eine Primzahl, die in A_D nicht träge sei. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen.

(1) p besitzt eine Primfaktorzerlegung in A_D.
(2) p ist nicht irreduzibel (also zerlegbar) in A_D.
(3) p oder $-p$ ist die Norm eines Elementes aus A_D.
(4) p oder $-p$ ist die Norm eines Primelementes aus A_D.

Aufgabe 10.3. Sei $D < 0$ quadratfrei und A_D der zugehörige imaginärquadratische Zahlbereich. Bestimme für $D \geq -12$ die Nichteinheiten $z \in A_D$ mit minimaler Norm.

Aufgabe 10.4. Betrachte in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ die beiden Elemente

$$x = 4 + 7\sqrt{-2} \text{ und } y = 5 + 8\sqrt{-2}\,.$$

Bestimme den größten gemeinsamen Teiler der Normen $N(x)$ und $N(y)$ (in $\mathbb{Z}$) und das von x und y erzeugte Ideal in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

Aufgabe 10.5. Man gebe ein Beispiel für einen quadratischen Zahlbereich, wo die -1 als Norm eines Elementes auftritt, und ein Beispiel, wo dies nicht der Fall ist.

Aufgabe 10.6.*

Bestimme die Norm des Ideals $(X^2 + 1)$ im Zahlbereich $\mathbb{Z}[X]/(X^4 + 1)$.

AUFGABE 10.7. Bestimme die Norm des Ideals (X^2+7) im Zahlbereich $\mathbb{Z}[X]/(X^3-2)$.

AUFGABE 10.8.*

(1) Zeige, dass in $\mathbb{Z}[X]$ die Ideale (X^4-7, X^3-5) und $(X+55, 282)$ übereinstimmen.
(2) Bestimme die Norm des Ideals (X^3-5) im Zahlbereich
$$\mathbb{Z}[X]/\big(X^4-7\big)\,.$$
(3) Bestimme die Norm des Ideals (X^4-7) im Zahlbereich
$$\mathbb{Z}[X]/\big(X^3-5\big)\,.$$

AUFGABE 10.9.*

Es sei R ein Zahlbereich und es sei $\mathfrak{p} \neq 0$ ein Primideal. Zeige, dass die Norm von $\mathfrak{p}$ eine echte Primzahlpotenz ist.

AUFGABE 10.10.*

Bestimme im quadratischen Zahlbereich $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ endlich viele Elemente $f_1, \ldots, f_m$, deren Norm 13 ist, und die die Eigenschaft erfüllen, dass jedes Element mit der Norm 13 zu einem der f_j assoziiert ist.

AUFGABE 10.11. Beschreibe das Spektrum eines diskreten Bewertungsringes.

AUFGABE 10.12. Sei R ein diskreter Bewertungsring und sei $\mathfrak{m} = (\pi)$. Es sei $K = R/(\pi)$ der Restklassenkörper von R. Zeige, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen R-Modulisomorphismus
$$(\pi^n)/(\pi^{n+1}) \longrightarrow K$$
gibt.

AUFGABE 10.13. Es sei R ein diskreter Bewertungsring, dessen Restekörper $K = R/\mathfrak{m} = \mathbb{F}_q$ endlich mit q Elementen sei. Zeige, dass $R/\mathfrak{m}^n$ ein endlicher Ring mit q^n Elementen ist. Man folgere, dass zu $f \in R$ die Gleichheit
$$\#\,(R/(f)) \,=\, q^{\operatorname{ord}(f)}$$
gilt, und dass man die Ordnung von f aus der Größe des Restklassenringes berechnen kann.

AUFGABE 10.14. Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper Q. Zeige, dass es keinen echten Zwischenring zwischen R und Q gibt.

AUFGABE 10.15. Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper Q. Charakterisiere die endlich erzeugten R-Untermoduln von Q. Auf welche Form kann man ein Erzeugendensystem bringen?

AUFGABE 10.16. Es sei K ein Körper der Charakteristik 0 und sei $f \in K[X]$, $f \neq 0$, und $a \in K$. Zeige, dass die folgenden „Ordnungen“ von f an der Stelle a übereinstimmen.

(1) Die Verschwindungsordnung von f an der Stelle a, also die maximale Ordnung einer formalen Ableitung mit $f^{(k)}(a) = 0$.
(2) Der Exponent des Linearfaktors $X - a$ in der Zerlegung von f.
(3) Die Ordnung von f an der Lokalisierung $K[X]_{(X-a)}$ von $K[X]$ am maximalen Ideal $(X - a)$.

AUFGABE 10.17. Sei K ein Körper und $K(T)$ der Körper der rationalen Funktionen über K. Finde einen diskreten Bewertungsring $R \subset K(T)$ mit $Q(R) = K(T)$ und mit $R \cap K[T] = K$.

AUFGABE 10.18. Beweise für einen diskreten Bewertungsring die Eigenschaften der Ordnung, die in Lemma 10.15 formuliert sind.

AUFGABE 10.19. Sei p eine fixierte Primzahl. Zu jeder ganzen Zahl $n \neq 0$ bezeichne $\nu_p(n)$ den Exponenten, mit dem die Primzahl p in der Primfaktorzerlegung von n vorkommt.

a) Zeige: die Abbildung $\nu_p : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ ist surjektiv.

b) Zeige: es gilt $\nu_p(nm) = \nu_p(n) + \nu_p(m)$.

c) Finde eine Fortsetzung $\nu_p : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ der gegebenen Abbildung, die ein Gruppenhomomorphismus ist (wobei $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit der Multiplikation und $\mathbb{Z}$ mit der Addition versehen ist).

d) Beschreibe den Kern des unter c) beschriebenen Gruppenhomomorphismus.

AUFGABE 10.20.*

Wir betrachten im quadratischen Zahlbereich $R = A_{-5} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ das Primideal $\mathfrak{p} = (2, 1 + \sqrt{-5})$. Zeige direkt, dass das Ideal $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ in der Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ ein Hauptideal ist.

AUFGABE 10.21. Sei $D \neq 1$ quadratfrei und $D = 1 \mod 4$. Finde in $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ derart, dass die Lokalisierung an $\mathfrak{p}$ kein diskreter Bewertungsring ist.

AUFGABE 10.22.*

Sei K ein Körper und sei

$$\nu\colon (K^\times, \cdot, 1) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +, 0)$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\nu(f+g) \geq \min\{\nu(f), \nu(g)\}$ für alle $f, g \in K^\times$. Zeige, dass

$$R = \left\{ f \in K^\times \mid \nu(f) \geq 0 \right\} \cup \{0\}$$

ein diskreter Bewertungsring ist.

AUFGABE 10.23. Es sei $V = V(x^2 + y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2_K$ der Einheitskreis über einem Körper K und es sei $P = (a, b) \in V$ ein Punkt.

(1) Zeige, dass der lokale Ring R von V im Punkt P ein diskreter Bewertungsring ist.
(2) Folgere, dass der Koordinatenring $K[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ normal ist (man kann K algebraisch abgeschlossen annehmen).
(3) Zeige, dass $K[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ nicht faktoriell ist.
(4) Bestimme die Ordnung von X und von $Y - 1$ im lokalen Ring zum Punkt $(0, 1)$.

AUFGABE 10.24. Sei K ein Körper. Eine *Potenzreihe in einer Variablen* über K ist ein formaler Ausdruck der Form

$$a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 + \ldots \text{ mit } a_i \in K\,.$$

Es kann hier also unendlich viele von 0 verschiedene Koeffizienten a_i geben. Definiere eine Ringstruktur auf der Menge aller Potenzreihen, die die Ringstruktur auf dem Polynomring in einer Variablen fortsetzt. Zeige, dass dieser Ring ein diskreter Bewertungsring ist.

AUFGABE 10.25. Sei R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$. Es sei $R = \bigcap_{i \in I} R_i$, wobei die $R_i \subset K$, $i \in I$, alle diskrete Bewertungsringe seien. Zeige: R ist normal.

Ein Modul, der außer 0 keine Torsionselemente enthält, heißt *torsionsfrei*.

AUFGABE 10.26. Zeige, dass ein torsionsfreier endlich erzeugter Modul M über einem diskreten Bewertungsring frei ist.

Abbildungsverzeichnis