Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 1

Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1.*

Zeige, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist.

Aufgabe 1.2. Es sei p eine Primzahl. Zeige unter Verwendung der eindeutigen Primfaktorzerlegung von natürlichen Zahlen, dass die reelle Zahl $\sqrt{p}$ irrational ist.

Aufgabe 1.3. Zeige

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$$

Aufgabe 1.4. Bestimme die Einheiten von $\mathbb{Z}$ und von $K[X]$, wobei K ein Körper sei.

Aufgabe 1.5. Berechne

$$\left(8+3\sqrt{7}\right)^2, \left(8+3\sqrt{7}\right)^3, \left(8+3\sqrt{7}\right)^4, \ldots .$$

Aufgabe 1.6. Finde die kleinste natürliche Zahl, die sich auf mehrfache Weise als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen lässt.

Aufgabe 1.7. Es sei n eine natürliche Zahl, die modulo 8 den Rest 7 besitzt. Zeige, dass n nicht als Summe von drei Quadraten darstellbar ist.

Aufgabe 1.8. Bestimme für jede natürliche Zahl $n \leq 30$, ob sie sich als eine Summe von drei Quadratzahlen darstellen lässt.

Aufgabe 1.9. Bestimme für jede natürliche Zahl $n \leq 10$, auf wie viele verschiedene Arten sie sich als Summe von vier Quadratzahlen darstellen lässt, d.h. man bestimme die Anzahl der 4-Tupel

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4 \text{ mit } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = n.$$

Aufgabe 1.10. Zu einer natürlichen Zahl n bezeichne $r(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten, sie als Summe von vier Quadratzahlen darzustellen, d.h. $r(n)$ ist die Anzahl der 4-Tupel

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4 \text{ mit } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = n.$$

Es sei u eine ungerade positive Zahl. Beweise die Beziehung

$$r(2u) = 3r(u)\,.$$

Tipp: Zu einem Tupel (x_1, x_2, x_3, x_4) kann man das Tupel $(x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_3 - x_4, x_3 + x_4)$ betrachten.

Aufgabe 1.11. Es sei $K \subseteq \mathbb{R}$ ein Unterkörper. Zeige, dass dann auch $K[\mathrm{i}]$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 1.12.*

Finde zwei natürliche Zahlen, deren Summe 65 und deren Produkt 1000 ist.

Aufgabe 1.13. Zeige, dass die Untergruppe

$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \sqrt{3} \subseteq \mathbb{R}$$

dicht ist.

Aufgabe 1.14. Sei H eine (additive) Untergruppe der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Zeige, dass entweder $H = \mathbb{Z}a$ mit einer eindeutig bestimmten nichtnegativen reellen Zahl a ist, oder aber H dicht in $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 1.15. Skizziere ein Entscheidungsverfahren für die Frage, ob eine diophantische Gleichung in einer Variablen eine Lösung besitzt oder nicht.

Aufgabe 1.16. Finde mindestens eine ganzzahlige Lösung $(x, y) \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ für die diophantische Gleichung

$$x^k + 1 = y^n$$

für $k, n \geq 2$.

Aufgabe 1.17. Zeige, dass die Gleichung

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

in $\mathbb{N}$ bei $a, b \leq n$ nur die Lösungen $n = a = b$ besitzt.

Aufgabe 1.18. Zeige, dass die Gleichung

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

in $\mathbb{Z}$ auch Lösungen mit $a \neq b$ besitzt.

Aufgabe 1.19.*

Zeige, dass die Gleichung
$$\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$
in $\mathbb{N}$ auch Lösungen $a \neq b$ besitzt.

Aufgabe 1.20. Finde eine nichttriviale ganzzahlige Lösung für das Gleichungssystem $ab = c$ und $(a-1)d = c-1$.

Aufgabe 1.21. Es seien $v \geq u \geq 0$ natürliche Zahlen. Zeige, dass
$$x = v^2 - u^2,\ y = 2uv,\ z = u^2 + v^2$$
die Gleichung
$$x^2 + y^2 = z^2$$
erfüllen.

Aufgabe 1.22. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und sei M die Menge der n-ten Einheitswurzeln in K. Zeige, dass M eine Untergruppe der Einheitengruppe $K^\times$ ist.

Aufgabe 1.23. Es sei K ein Körper, $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Wenn $b_1, b_2 \in K$ zwei Lösungen der Gleichung $X^n = a$ sind und $b_2 \neq 0$, so ist ihr Quotient b_1/b_2 eine n-te Einheitswurzel.
(2) Wenn $b \in K$ eine Lösung der Gleichung $X^n = a$ und ζ eine n-te Einheitswurzel ist, so ist auch ζb eine Lösung der Gleichung $X^n = a$.

Aufgabe 1.24. Zeige: Um den Satz von Wiles für alle Exponenten $n \geq 3$ zu zeigen, genügt es, ihn für alle ungeraden Primzahlen als Exponenten zu beweisen.

Aufgabe 1.25. Es sei
$$x^n + y^n = z^n$$
eine Fermat-Gleichung. Zeige: wenn es keine nichttriviale Lösung (x, y, z) in natürlichen Zahlen gibt, so gibt es auch keine nichttriviale Lösung in ganzen Zahlen.

Aufgabe 1.26. Zeige unter Verwendung des Satzes von Wiles, dass die diophantische Gleichung
$$x^n + y^n + z^n = 0$$
für $n \geq 2$ keine von $(0,0,0)$ verschiedene Lösung besitzt.

Aufgabe 1.27.*

Zeige, dass in $\mathbb{Z}/(29)$ die Gleichung
$$x^4 + y^4 + z^4 = 0$$
nur die triviale Lösung $(0,0,0)$ besitzt.

AUFGABE 1.28. Bestätige die folgenden Identitäten.

(1)
$$1 + 2^3 = 3^2.$$

(2)
$$2^5 + 7^2 = 3^4.$$

(3)
$$13^2 + 7^3 = 2^9.$$

Abbildungsverzeichnis