

Algebraische Kurven

Vorlesung 3

Die Zariski-Topologie



Oscar Zariski (1899-1986)

In Proposition 2.8 haben wir gezeigt, dass die affin-algebraischen Teilmengen eines affinen Raumes die Axiome für abgeschlossene Mengen einer Topologie erfüllen. Diese Topologie nennt man die Zariski-Topologie.

DEFINITION 3.1. In einem affinen Raum \mathbb{A}_K^n versteht man unter der *Zariski-Topologie* diejenige Topologie, bei der die affin-algebraischen Mengen als abgeschlossen erklärt werden.

Die offenen Mengen der Zariski-Topologie sind also die Komplemente der affin-algebraischen Mengen. Sie werden zu einem Ideal \mathfrak{a} mit

$$D(\mathfrak{a}) = \mathbb{A}_K^n \setminus V(\mathfrak{a})$$

bezeichnet. Die Zariski-Topologie weicht sehr stark von anderen Topologien ab, insbesondere von solchen, die durch eine Metrik gegeben sind. Insbesondere ist die Zariski-Topologie nicht hausdorffsch. Generell kann man sagen, dass die offenen Mengen (außer der leeren Menge) in der Zariski-Topologie sehr groß sind (siehe Aufgabe 3.19), während die abgeschlossenen (also die affin-algebraischen Mengen) sehr dünn sind (außer dem ganzen Raum selbst).

BEISPIEL 3.2. Die Zariski-Topologie auf der affinen Geraden \mathbb{A}_K^1 lässt sich einfach beschreiben. Als (Zariski)-abgeschlossene Teilmenge haben wir zunächst einmal die gesamte affine Gerade, die durch $V(0)$ beschrieben wird. Alle anderen abgeschlossenen Teilmengen werden durch $V(\mathfrak{a})$ mit $\mathfrak{a} \neq 0$ beschrieben. Da $K[X]$ ein Hauptidealbereich ist, kann man sogar $\mathfrak{a} = (f)$, $f \neq 0$, ansetzen. Die zugehörige Nullstellenmenge besteht also aus endlich vielen Punkten. Andererseits ist jeder einzelne Punkt P mit der Koordinate a

die einzige Nullstelle des linearen Polynoms $X - a$, also ist $\{P\} = V(X - a)$ Zariski-abgeschlossen. Eine endliche Ansammlung von Punkten P_1, \dots, P_k mit den Koordinaten a_1, \dots, a_k ist die Nullstellenmenge des Polynoms $(X - a_1) \cdots (X - a_k)$. Die Zariski-abgeschlossenen Mengen der affinen Geraden bestehen also aus allen endlichen Teilmengen (einschließlich der leeren) und der gesamten Menge.



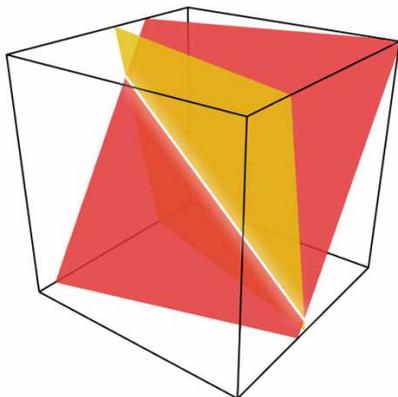
BEISPIEL 3.3. Jeder Punkt

$$P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_K^n$$

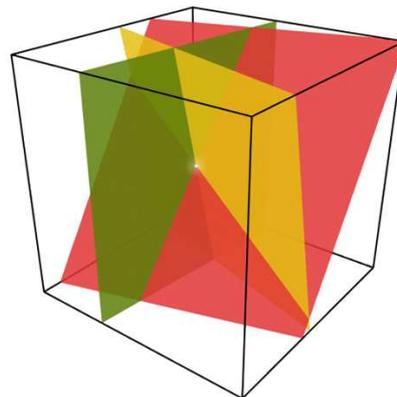
ist Zariski-abgeschlossen, und zwar ist

$$P = V(X_1 - a_1, X_2 - a_2, \dots, X_n - a_n).$$

Punkte sind (neben der leeren Menge und dem gesamten Raum) die einfachsten affin-algebraischen Mengen. Das Ideal (*Punktideal*) $(X_1 - a_1, X_2 - a_2, \dots, X_n - a_n)$ ist maximal, siehe Aufgabe 2.12.



Der Schnitt von zwei und



von drei Ebenen

Nach Proposition 2.8 (3) sind somit alle endlichen Teilmengen des affinen Raumes Zariski-abgeschlossen und somit sind die Komplemente $\mathbb{A}_K^n \setminus E$, wenn E eine endliche Punktmenge bezeichnet, Zariski-offen. Ferner ist zu einer rationalen Funktion P/Q mit $P, Q \in K[X_1, \dots, X_n]$ und $Q \neq 0$ der Definitionsbereich, nämlich $D(Q)$, offen.

Das Verschwindungsideal

DEFINITION 3.4. Sei $T \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine Teilmenge. Dann nennt man

$$\{F \in K[X_1, \dots, X_n] \mid F(P) = 0 \text{ für alle } P \in T\}$$

das *Verschwindungsideal* zu T . Es wird mit $\text{Id}(T)$ bezeichnet.

Es handelt sich dabei in der Tat um ein Ideal: Wenn $F(P) = 0$ und $G(P) = 0$ ist für alle $P \in T$, so gilt dies auch für die Summe $F + G$ und für jedes Vielfache HF .

Damit haben wir zwei Zuordnungen in entgegengesetzte Richtung: Einer Teilmenge im affinen Raum wird das Verschwindungsideal zugeordnet und einem Ideal im Polynomring das zugehörige Nullstellengebilde. Wir interessieren uns dafür, inwiefern sich Ideale und Nullstellengebilde entsprechen.

BEISPIEL 3.5. Das Verschwindungsideal zur leeren Menge ist das Einheitsideal, da es keinen Punkt gibt, auf dem die Nullstellenbedingung überprüft werden müsste.

Das Verschwindungsideal zum Gesamtraum \mathbb{A}_K^n hängt vom Körper ab. Wenn dieser unendlich ist, so gibt es nur das Nullpolynom, das überall verschwindet, und folglich ist das Verschwindungsideal gleich dem Nullideal. Dies folgt aus Aufgabe 3.19.

Ist hingegen der Körper endlich mit q Elementen, so ist $x^q - x = 0$ für jedes $x \in K$. Also verschwindet das Polynom $X^q - X$ auf jedem Punkt der affinen Geraden und gehört somit zum Verschwindungsideal der affinen Geraden. In höherer Dimension ist das Verschwindungsideal gleich $(X_1^q - X_1, X_2^q - X_2, \dots, X_n^q - X_n)$.

BEISPIEL 3.6. Sei $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_K^n$. Dann ist das Verschwindungsideal $\text{Id}(P)$ gleich dem Ideal $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$. Zunächst ist klar, dass die linearen Polynome $X_i - a_i$ im Punkt P verschwinden (wegen $(X_i - a_i)(P) = a_i - a_i = 0$). Damit gehört auch das von diesen Polynomen erzeugte Ideal zum Verschwindungsideal. Sei umgekehrt F ein Polynom mit $F(P) = 0$. Wir schreiben F in den „neuen Variablen“

$$\tilde{X}_1 = X_1 - a_1, \dots, \tilde{X}_n = X_n - a_n,$$

indem wir X_i durch $X_i - a_i + a_i$ ersetzen. In den neuen Variablen sei $F = \sum_{\nu} b_{\nu} \tilde{X}^{\nu}$. Dieses Polynom besteht aus der Konstanten b_0 , in jedem anderen Monom kommt mindestens eine Variable vor. Also können wir

$$F = F_1 \tilde{X}_1 + \dots + F_n \tilde{X}_n + c$$

mit gewissen Polynomen F_i schreiben. Daher ist $F(P) = c = 0$ und $F \in (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$.

LEMMA 3.7. Seien $V \subseteq W \subseteq \mathbb{A}_K^n$ zwei Teilmengen. Dann gilt für die zugehörigen Verschwindungsideale die Inklusion

$$\text{Id}(W) \subseteq \text{Id}(V).$$

Beweis. Sei $F \in \text{Id}(W)$, d.h. es ist $F(P) = 0$ für alle $P \in W$. Dann ist erst recht $F(P) = 0$ für alle $P \in V$. Also ist auch $F \in \text{Id}(V)$. \square

LEMMA 3.8. Sei $I \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal und sei $T \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine Teilmenge. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Es ist $T \subseteq V(\text{Id}(T))$.
- (2) Es ist $I \subseteq \text{Id}(V(I))$.
- (3) Es ist $V(I) = V(\text{Id}(V(I)))$.
- (4) Es ist $\text{Id}(T) = \text{Id}(V(\text{Id}(T)))$.

Beweis. (1). Sei $P \in T$ ein Punkt. Dann verschwindet nach Definition jedes Polynom $F \in \text{Id}(T)$ auf T , also $P \in V(\text{Id}(T))$.

(2). Sei $F \in I$. Dann verschwindet F auf ganz $V(I)$ und daher ist $F \in \text{Id}(V(I))$.

(3). Nach (1), angewandt auf $T = V(I)$, haben wir die Inklusion „ \subseteq “. Nach (2) ist $I \subseteq \text{Id}(V(I))$. Wendet man darauf $V(-)$ an, so ergibt sich nach Lemma 2.7 die andere Inklusion.

(4). Wie (3). \square

BEISPIEL 3.9. Die Inklusionen in Lemma 3.8 (1), (2) sind echt. Sei zum Beispiel $T \subset \mathbb{A}_K^1$ eine unendliche echte Teilmenge (was voraussetzt, dass K unendlich ist). Dann ist $\text{Id}(T) = 0$, und also ist $V(0) = \mathbb{A}_K^1$ echt größer als T .

Zu (2). Sei $I = (X^2)$, $R = K[X]$. Dann ist $V(I) = \{0\}$ und $\text{Id}(\{0\}) = (X)$, aber $X \notin (X^2)$. Ein extremeres Beispiel für $R = \mathbb{R}[X, Y]$ ist $I = (X^2 + Y^2)$ mit $V(I) = \{(0, 0)\}$. Das Verschwindungsideal zu diesem Punkt ist aber das Ideal (X, Y) .

LEMMA 3.10. Sei $T \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine Teilmenge. Dann ist der Zariski-Abschluss von T gleich

$$\overline{T} = V(\text{Id}(T)).$$

Beweis. Die Inklusion $T \subseteq V(\text{Id}(T))$ wurde in Lemma 3.8 (1) gezeigt. Da $V(\text{Id}(T))$ nach Definition abgeschlossen ist, folgt daraus $\overline{T} \subseteq V(\text{Id}(T))$.

Sei umgekehrt $P \in V(\text{Id}(T))$ und sei $P \notin \overline{T}$ angenommen. Dies bedeutet, dass es eine Zariski-offene Menge U gibt mit $P \in U$ und $U \cap T = \emptyset$. Sei $U = D(\mathfrak{a})$. Die Bedingung $P \in U$ bedeutet, dass es ein $G \in \mathfrak{a}$ geben muss mit $G(P) \neq 0$. Es ist dann $P \in D(G) \subseteq U$ und damit $T \cap D(G) = \emptyset$. Also ist $T \subseteq V(G)$ und somit $G \in \text{Id}(T)$. Wegen $G(P) \neq 0$ ergibt sich ein Widerspruch zu $P \in V(\text{Id}(T))$. \square

Das Radikal

DEFINITION 3.11. Ein Ideal \mathfrak{a} in einem kommutativen Ring R heißt *Radikal* (oder *Radikalideal*), wenn folgendes gilt: Falls $f^n \in \mathfrak{a}$ ist für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist bereits $f \in \mathfrak{a}$.

DEFINITION 3.12. Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann nennt man die Menge

$$\{f \in R \mid \text{es gibt ein } r \text{ mit } f^r \in \mathfrak{a}\}$$

das *Radikal* zu \mathfrak{a} . Es wird mit $\text{rad}(\mathfrak{a})$ bezeichnet.

Das Radikal zu einem Ideal ist selbst ein Radikal und insbesondere ein Ideal.

LEMMA 3.13. Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann ist das Radikal zu \mathfrak{a} ein Radikalideal.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass ein Ideal vorliegt. 0 gehört offenbar zum Radikal und mit $f \in \text{rad}(\mathfrak{a})$, sagen wir $f^r \in \mathfrak{a}$, ist auch $(af)^r = a^r f^r \in \mathfrak{a}$, also gehört af zum Radikal. Zur Summeneigenschaft seien $f, g \in \text{rad} \mathfrak{a}$ mit $f^r \in \mathfrak{a}$ und $g^s \in \mathfrak{a}$. Dann ist

$$\begin{aligned} (f+g)^{r+s} &= \sum_{i+j=r+s} \binom{r+s}{i} f^i g^j \\ &= \sum_{i+j=r+s, i < r} \binom{r+s}{i} f^i g^j + \sum_{i+j=r+s, i \geq r} \binom{r+s}{i} f^i g^j \in \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Sei nun $f^k \in \text{rad}(\mathfrak{a})$. Dann ist $(f^k)^r = f^{kr} \in \mathfrak{a}$, also $f \in \text{rad}(\mathfrak{a})$. □

LEMMA 3.14. Sei $T \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine Teilmenge. Dann ist das Verschwindungsideal zu T ein Radikal.

Beweis. Sei $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ ein Polynom, und sei $F^s \in \text{Id}(T)$. Dann ist $F^s(P) = 0$ für alle $P \in T$. Dann ist aber auch $F(P) = 0$ für alle $P \in V$, also $F \in \text{Id}(T)$. □

Wir werden später sehen, dass über einem algebraisch abgeschlossenen Körper sich Radikale und algebraische Nullstellengebilde entsprechen. Das ist der Inhalt des *Hilbertschen Nullstellensatzes*.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Oscar Zariski.jpg , Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz =	1
Quelle = Linline.jpg , Autor = Benutzer Astur1 auf Commons, Lizenz = PD	2
Quelle = IntersectingPlanes.png , Autor = Benutzer Stib auf en.wikipedia.org, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	2
Quelle = Secretsharing-3-point.png , Autor = Benutzer Stib auf en.wikipedia.org, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	2