

Algebraische Kurven

Vorlesung 25

Lösung in Potenzreihen für algebraische Kurven

Sei $F \neq 0$ ein Polynom, das die ebene algebraische Kurve C beschreibe, und sei $P = (0, 0) \in C$ vorausgesetzt (was keine Einschränkung ist, und durch Verschiebung immer erreicht werden kann). Wie kann man die Kurve im Nullpunkt mittels Potenzreihen beschreiben, wann gibt es also einen durch nichtkonstante Potenzreihen G und H mit konstantem Term 0 definierten Ringhomomorphismen

$$K[X, Y] \longrightarrow K[[T]] \text{ mit } X \longmapsto G \text{ und } Y \longmapsto H$$

mit $F(G, H) = 0$ (also einen Ringhomomorphismus $K[X, Y]/(F) \rightarrow K[[T]]$). Es geht also um Lösungen der Gleichung

$$F(X, Y) = 0$$

in Potenzreihen, die das Verhalten der Kurve um die Punktlösung 0 herum genauer beschreiben.

Der grundsätzliche Ansatz ist hier ein *Potenzreihenansatz*, wie er beispielsweise auch in der Theorie der Differentialgleichungen verwendet wird. Man setzt

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k \text{ und } H = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell T^\ell$$

mit zunächst unbestimmten Koeffizienten a_k und b_ℓ an. Das direkte Einsetzen in die beschreibende Gleichung $F = 0$ und Ausmultiplizieren ergibt dann einen prinzipiell unendlichen Ausdruck. Allerdings ist für jedes T^k der zugehörige Ausdruck für den Koeffizienten nur durch endlich viele Daten bestimmt, und zwar sind dafür nur die Koeffizienten von F, G und H unterhalb des Grades k relevant. Da $F(G, H) = 0$ sein soll, müssen die Koeffizienten von F, G, H so sein, dass sich als Koeffizient zu T^k stets 0 ergibt.

Man sucht dann nach Bedingungen, wann es dafür Lösungen gibt, wie sie aussehen und ob sie eindeutig sind. Die Bedingung $a_0 = b_0 = 0$ ist dabei eine *Anfangsbedingung*, die wiedergibt, dass die Potenzreihenlösung durch den Nullpunkt gehen soll.

Es ergibt sich schnell eine Bedingung an die linearen Terme der Potenzreihen (also an a_1 und b_1), die man als eine weitere Rechtfertigung dafür ansehen kann, dass wir die Linearfaktoren des ersten homogenen Bestandteiles F_m in der homogenen Zerlegung von F als Tangentengleichungen interpretiert haben.

LEMMA 25.1. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \in K[X, Y]$ ein Polynom mit homogener Zerlegung $F = F_m + \dots + F_d$ mit $d \geq m \geq 1$ und $F_m \neq 0$. Es sei

$$F_m = \prod_{\lambda=1}^m (u_\lambda X + v_\lambda Y)$$

die Faktorzerlegung in Linearfaktoren (diese Linearfaktoren definieren also die Tangenten von $C = V(F)$ an $P = (0, 0)$). Es seien

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \quad \text{und} \quad H = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell T^\ell \in K[[T]]$$

Potenzreihen, die eine Lösung der Kurvengleichung $F = 0$ durch den Nullpunkt beschreiben (d.h. $a_0 = b_0 = 0$). Dann ist $u_\lambda a_1 + v_\lambda b_1 = 0$ für ein λ , d.h. der lineare Term der Potenzreihen ist durch eine der Tangenten vorgegeben.

Beweis. Wir setzen

$$G = a_1 T + a_2 T^2 + \dots \quad \text{und} \quad H = b_1 T + b_2 T^2 + \dots$$

in F ein. In einem homogenen Bestandteil F_k , der ja eine Summe von Ausdrücken der Form $c_{ij} X^i Y^j$ mit $i + j = k$ ist, kann man sofort T^k ausklammern, und zwar ergibt sich ein Ausdruck der Form

$$F_k(G, H) = \left(\sum_{i+j=k} c_{ij} a_1^i b_1^j \right) T^k + \left(\sum_{i+j=k} c_{ij} (i a_1^{i-1} a_2 b_1^j + j a_1^i b_1^{j-1} b_2) \right) T^{k+1} + \dots$$

In den Koeffizient von T^k gehen also a_1, b_1 in einer übersichtlichen Form über F_k ein, aber auch kompliziertere Terme, die von F_ℓ , $\ell < k$, herrühren. Auf F_m angewandt, wo ja keine kleineren homogenen Komponenten mitberücksichtigt werden müssen, heißt dies, dass

$$\sum_{i+j=m} c_{ij} a_1^i b_1^j = 0$$

die entscheidende Gleichung für a_1 und b_1 ist. Dies ist aber nichts anderes als die Bedingung

$$F_m(a_1, b_1) = 0.$$

Da F_m ein Produkt von Linearfaktoren ist, muss (a_1, b_1) einen der Linearfaktoren annullieren, was die behauptete Aussage ist. \square

Man beachte, dass im vorstehenden Lemma die Möglichkeit $a_1 = b_1 = 0$ nicht ausgeschlossen ist. In der Tat gibt es nur unter zusätzlichen Bedingungen eine Realisierung einer Kurve mittels Potenzreihen entlang einer vorgegebenen Tangente, siehe Satz 25.2 und die Beispiele weiter unten.

Der Rechenaufwand zur Bestimmung einer Potenzreihenlösung lässt sich wesentlich verringern, wenn man sich auf „Graphenlösungen“ beschränkt, wo die eine Potenzreihe einfach ein lineares Polynom ist (und zwar eines, das

durch eine Tangente gegeben ist), und die zweite eine zu bestimmende Potenzreihe. Das ist häufig keine wesentliche Einschränkung, wie aus Lemma 24.10 folgt. Mit diesem Lemma können wir nämlich die Potenzreihen $G, H \in K[[T]]$ einfach transformieren, wenn nicht beide linearen Terme verschwinden. Sei hierzu $G = a_1T + \dots$, $a_1 \neq 0$ angenommen. Mit einer geeigneten Potenzreihe $U(T)$ ist $U(G(T)) = T$ und $U(H(T)) = \tilde{H}(T)$. Man schaltet also einen Potenzreihenautomorphismus dahinter, damit die Hintereinanderschaltung

$$K[X, Y] \xrightarrow{X \mapsto G, Y \mapsto H} K[[T]] \xrightarrow{T \mapsto U(T)} K[[T]]$$

die besonders einfache Gestalt $X \mapsto T$, $Y \mapsto \tilde{H}$ bekommt. Dies bedeutet, dass man die Kurve als Graph zu einer formalen Funktion in einer Variablen realisieren möchte.

SATZ 25.2. *Sei K ein Körper und sei $F \in K[X, Y]$ ein Polynom $\neq 0$ mit $(0, 0) \in C = V(F)$ und sei $F = F_d + \dots + F_m$ die homogene Zerlegung von F mit $d \geq m$ und mit $F_m \neq 0$. Es sei $uX + vY$ ein einfacher Linearfaktor von F_m (also ein lineares Polynom, das eine Tangente mit Multiplizität 1 definiert). Dann gibt es Potenzreihen*

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n, H = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell T^\ell \in K[[T]]$$

mit $F(G, H) = 0$ und mit konstantem Term $a_0, b_0 = 0$ und mit $a_1 u + b_1 v = 0$. Dabei kann eine der Potenzreihen als ein lineares Polynom gewählt werden.

Beweis. Durch eine lineare Variablentransformation können wir annehmen, dass $uX + vY = Y$ ist. Wir zeigen, dass es dann eine Potenzreihenlösung mit $G = T$ und mit (zu konstruierendem) $H = b_2 T^2 + b_3 T^3 + \dots$ gibt. Wegen $a_1 = 1$ und $b_1 = 0$ erfüllt das die angegebene lineare (Tangenten-)Bedingung.

Sei $F = \sum_{i,j} c_{ij} X^i Y^j$. Es ist $c_{m,0} = 0$, da andernfalls Y kein Linearfaktor von F_m sein könnte, und es ist $c_{m-1,1} \neq 0$, da sonst Y ein Linearfaktor mit einer Multiplizität ≥ 2 wäre.

Wir zeigen, dass es bei diesen Anfangsdaten eine eindeutig bestimmte Potenzreihe $H = b_2 T^2 + b_3 T^3 + \dots$ gibt. Einsetzen von G und H in F ergibt für jedes k eine Bedingung, da der resultierende Koeffizient zu T^k gleich 0 sein muss. Der k -te Koeffizient ist eine Summe von Ausdrücken der Form

$$c_{ij} b_{\ell_1} \cdots b_{\ell_j} \text{ mit } i + \sum_{\rho=1}^j \ell_\rho = k$$

(diese Ausdrücke kommen mehrfach mit einem gewissen Multinomialkoeffizienten vor). Da $\ell_\rho \geq 2$ ist, kommt für $k < m + \ell - 1$ der Term b_ℓ nicht vor.

Der Term b_ℓ kommt erstmals im $k = (m + \ell - 1)$ -ten Koeffizienten vor, und zwar in der einzigen Weise

$$c_{m-1,1}b_\ell.$$

Ansonsten kommen in diesem Koeffizienten nur die c_{ij} und b_r mit $r < \ell$ vor. Da nach Voraussetzung $c_{m-1,1} \neq 0$ ist, ist dadurch der Wert von b_ℓ eindeutig festgelegt. Die Koeffizienten b_ℓ werden also induktiv konstruiert, wobei die Werte jeweils eindeutig durch die Bedingung an die Koeffizienten festgelegt sind. \square

BEISPIEL 25.3. Wir betrachten die ebene affine Kurve vom Grad drei, die durch die Gleichung $F = X^3 + XY + Y = 0$ gegeben ist. Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial F}{\partial X} = 3X^2 + Y \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial Y} = X + 1.$$

Die zweite Ableitung ist nur bei $X = -1$ gleich 0, dort hat aber F den Wert -1 , d.h. die Kurve ist glatt. Im Nullpunkt haben die partiellen Ableitungen den Wert $(0, 1)$. Die zugehörige Tangente ist also die X -Achse, was dazu passt, dass der lineare Term der Kurvengleichung Y ist.

Wir berechnen die Potenzreihe $Y = H(T) = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell T^\ell$, die die Kurve im Nullpunkt als Graphen beschreibt (es ist $X = T$). Die Anfangsbedingungen sind $b_0 = b_1 = 0$. Für die folgenden Koeffizienten von H müssen wir aus der Gleichung

$$F(T, H) = T^3 + TH + H = 0,$$

also

$$T^3 + T(b_2T^2 + b_3T^3 + \dots) + (b_2T^2 + b_3T^3 + \dots) = 0$$

über die Koeffizienten der T^k die Bedingungen an b_ℓ herauslesen.

b_2 . Der zweite Koeffizient liefert sofort $b_2 = 0$.

b_3 . Der dritte Koeffizient liefert die Bedingung $1 + b_3 = 0$, woraus $b_3 = -1$ folgt.

Die folgenden Koeffizienten liefern die Bedingung $b_{\ell-1} + b_\ell = 0$, so dass also die folgenden b_ℓ abwechselnd 1 und -1 sind. Man hat also eine einfache Rekursionsformel und es ist

$$H = -T^3 + T^4 - T^5 + T^6 - T^7 + \dots$$

Die Umformung der Kurvengleichung in

$$Y = \frac{-X^3}{1+X}$$

zeigt, dass hier der Graph einer rationalen Funktion (mit einem Pol bei $X = -1$) vorliegt. Die angegebene Potenzreihe beschreibt also den Graphen einer rationalen Funktion als Graphen einer formal-analytischen Funktion.

BEISPIEL 25.4. Wir betrachten das Kartesische Blatt, das durch $X^3 + Y^3 - 3XY = 0$ gegeben ist, im Nullpunkt und bezüglich der durch $Y = 0$ gegebenen Tangente und wollen die Potenzreihe bestimmen, mit der sich der „Zweig“ der Kurve, der diese Tangente definiert, als Graph beschreiben lässt. Wir setzen also $X = T$ und $H = b_2T^2 + b_3T^3 + b_4T^4 + \dots$ an und haben diese Koeffizienten zu bestimmen (die Charakteristik von K sei nicht 3). Die Koeffizienten b_ℓ sind durch die Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &= T^3 + H^3 - 3TH \\ &= T^3 + (b_2T^2 + b_3T^3 + \dots)^3 - 3T(b_2T^2 + b_3T^3 + \dots) \end{aligned}$$

festgelegt. Das Einsetzen bzw. Ausmultiplizieren dieser Potenzreihe liefert zum ersten Mal für $k = 3$ eine Bedingung. Der Summand X^3 (bzw. T^3) muss überhaupt nur einmal berücksichtigt werden, nämlich für $k = 3$. Der Summand Y^3 muss erst ab $k \geq 6$ berücksichtigt werden, da ja $Y = H$ ein Vielfaches von T^2 ist. Der Summand XY muss ab $k = 3$ berücksichtigt werden.

b_2 . Hier hat man die Bedingung

$$1 - 3b_2 = 0,$$

woraus sich $b_2 = \frac{1}{3}$ ergibt.

b_3 . Dies taucht erstmals in der Bedingung für den vierten Koeffizienten auf. Dort steht es aber isoliert, so dass $b_3 = 0$ sein muss.

b_4 . Aus dem gleichen Grund ist $b_4 = 0$.

b_5 . Hierfür ist der sechste Koeffizient entscheidend, und dabei ist jetzt auch Y^3 zu berücksichtigen. Es ergibt sich die Bedingung

$$b_2^3 - 3b_5 = 0,$$

also $b_5 = \frac{1}{81}$.

b_6, b_7, b_8 . Der Summand

$$Y^3 = (b_2T^2 + b_5T^5 + \dots)(b_2T^2 + b_5T^5 + \dots)(b_2T^2 + b_5T^5 + \dots)$$

leistet erstmals wieder für den neunten Koeffizienten einen Beitrag, und zwar ist dieser $3b_2^2b_5$. Dies bedeutet, dass b_6 und b_7 isoliert stehen und daher null sein müssen. Für b_8 ergibt sich die Bedingung

$$3b_2^2b_5 - 3b_8 = 0$$

und daher ist $b_8 = \frac{1}{729}$.

Die Anfangsglieder der Potenzreihe H , die den einen Kurvenzweig im Nullpunkt als Graph beschreibt, ist also

$$H = \frac{1}{3}T^2 + \frac{1}{81}T^5 + \frac{1}{729}T^8 + \dots$$

BEISPIEL 25.5. Wir betrachten die durch $X^3 - Y^2 = 0$ definierte Neilsche Parabel. Hier ist der Nullpunkt singulär, und es gibt nur eine Tangente, nämlich $Y = 0$, diese hat aber die Multiplizität zwei, d.h. Satz 25.2 ist hier nicht anwendbar. Wir werden zeigen, dass es überhaupt keine Potenzreihenlösung im Nullpunkt mit nicht verschwindendem linearen Term gibt.

Seien dazu $X = G = a_1T + a_2T^2 + \dots$ und $Y = H = b_1T + b_2T^2 + \dots$ Potenzreihen, die die Kurvengleichung erfüllen. Wir setzen in die Kurvengleichung ein und erhalten für den zweiten Koeffizient die Bedingung $-b_1^2 = 0$, woraus $b_1 = 0$ folgt. Für den dritten Koeffizienten ergibt sich hingegen $a_1^3 = 0$, also wieder $a_1 = 0$.

Dennoch gibt es Potenzreihenlösungen für die Neilsche Parabel durch den Nullpunkt. Hierzu kann man einfach die monomiale Lösung $G = T^2$ und $H = T^3$ nehmen (die ja sogar eine Bijektion zwischen der affinen Geraden und der Neilschen Parabel stiftet). Der lineare Term davon ist freilich gleich 0..

BEMERKUNG 25.6. Sei $K = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$ und $F \in K[X, Y]$. Bei

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(P), \frac{\partial F}{\partial y}(P) \right) \neq (0, 0),$$

wenn also P ein regulärer Punkt der Funktion F ist (oder, äquivalent, ein glatter Punkt von $C = V(F - F(P))$), so sichert der Satz über implizite Funktionen, dass sich die Kurve in einer (metrischen) Umgebung des Punktes als Graph einer differenzierbaren Funktion darstellen lässt.