Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Vorlesung 24

Tangenten bei Parametrisierungen

Satz 24.1. *Es sei K ein unendlicher Körper und*

$$\varphi\colon \mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^n$$

eine durch n Polynome $\varphi = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ in einer Variablen gegebene Abbildung, deren Bild in der Kurve $C = V(F_1, \ldots, F_m)$ liege. Es sei $P = \varphi(Q) \in C$. Dann liegt der (Ableitungs)-Vektor $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(Q), \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t}(Q)\right)$ im Kern der durch die Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(P)\right)_{ij}$$

definierten linearen Tangentialabbildung

$$(TF)_P\colon \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^m.$$

Ist $n = 2$ und verschwinden nicht beide partiellen Ableitungen von φ und ist P ein glatter Punkt von C, so definiert der Vektor $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(Q), \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(Q)\right)$ die Richtung der Tangente von C in P.

Beweis. Wegen $\varphi\left(\mathbb{A}_K^1\right) \subseteq V(F_1, \ldots, F_m)$ ist die Hintereinanderschaltung $F \circ \varphi$ die konstante Abbildung auf den Nullpunkt. Über einem unendlichen Körper sind dann auch die beschreibenden Komponentenpolynome gleich 0. Daher ist nach der (algebraischen) Kettenregel auch

$$0 = (T(F \circ \varphi))_Q = (TF)_P \circ (T\varphi)_Q,$$

und das ist die Behauptung. Daraus folgt auch der Zusatz, da unter den angegebenen Bedingungen der Kern der Jacobi-Matrix und das Bild der Tangentialabbildung eindimensional sind, also wegen der Inklusion übereinstimmen müssen. □

Beispiel 24.2. Wir knüpfen an Beispiel 6.3 an, d.h. wir betrachten die Kurve $V(y^2 - x^2 - x^3)$ mit der Parametrisierung

$$(\varphi(t), \psi(t)) = \left(t^2 - 1, t\left(t^2 - 1\right)\right) = (x, y).$$

Die partiellen Ableitungen von F sind

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x - 3x^2 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y} = 2y\,.$$

Die Jacobi-Matrix der Parametrisierung ist

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \left(2t,\, 3t^2 - 1\right).$$

Damit ist in der Tat (mit $P = (\varphi(t), \psi(t))$)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(P), \frac{\partial F}{\partial y}(P)\right)\begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2-1 \end{pmatrix} &= \left(-2\left(t^2-1\right) - 3\left(t^2-1\right)^2, 2\left(t^3-t\right)\right)\begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2-1 \end{pmatrix} \\ &= -4t(t^2-1) - 6t\left(t^2-1\right)^2 + 2\left(t^3-t\right)\left(3t^2-1\right) \\ &= -4t^3 + 4t - 6t^5 + 12t^3 - 6t + 6t^5 - 2t^3 - 6t^3 + 2t \\ &= 0.\end{aligned}$$

Für $t = 2$ ergibt sich beispielsweise der Bildpunkt $P = (3,6)$. Für diesen Wert ist der Ableitungsvektor gleich $(4,11)$. Die partiellen Ableitungen an P ergeben den Gradienten $(-33,12)$, der senkrecht zum Tangentialvektor steht. Die Tangente selbst wird durch

$$\{(3,6) + s(4,11) \mid s \in K\} \text{ oder als } V(-11x + 4y + 9)$$

beschrieben.

Tangenten bei Raumkurven

Wir beschränken uns zwar hauptsächlich auf den Fall von ebenen Kurven, dennoch kann man auch für Kurven in einer höherdimensionalen Umgebung und überhaupt für beliebige Varietäten mit der Hilfe von Ableitungen die Begriffe glatt und singulär definieren. Wir demonstrieren dies kurz für Raumkurven, die durch zwei Polynome $F, G \in K[X,Y,Z]$ in drei Variablen ohne gemeinsame Komponenten gegeben seien (nicht jede Raumkurve lässt sich so beschreiben!). In diesem Fall betrachtet man zu einem Punkt $P \in C = V(F,G)$ wieder die *Jacobi-Matrix*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}_P : \mathbb{A}^3_K \longrightarrow \mathbb{A}^2_K.$$

Dann ist P ein glatter Punkt der Kurve genau dann, wenn diese Matrix den Rang zwei hat. Der eindimensionale Kern definiert dann die *Tangente*.

Beispiel 24.3. Wir knüpfen an Beispiel 4.6 an, also den Schnitt C der beiden Zylinder, die durch

$$F = x^2 + y^2 - 1 \text{ und } G = x^2 + z^2 - 1$$

gegeben sind. Die partiellen Ableitungen sind

$$\partial F = (2x, 2y, 0) \text{ und } \partial G = (0, 2y, 2z).$$

Ein singulärer Punkt liegt vor, wenn diese durch die Jacobi-Matrix definierte Abbildung einen Rang ≤ 1 hat, und dies ist genau dann der Fall, wenn die beiden partiellen Ableitungstupel linear abhängig sind (und es ein Punkt der zugehörigen Varietät ist). Wegen der beiden Nullen kann lineare Abhängigkeit nur bei $x = z = 0$ vorliegen, und dort liegt sie für beliebiges y auch vor. Bei $x = z = 0$ ergibt allerdings nur $y = \pm 1$ einen Punkt der Kurve, und das sind die beiden singulären Punkte von C. Dies sind natürlich genau die beiden Schnittpunkte der beiden Kreise, die nach Beispiel 4.6 die irreduziblen Komponenten von C sind.

Wenn die Radien der beiden Zylinder nicht gleich groß sind, sagen wir $r_1 \neq r_2$, so funktioniert die Bestimmung der singulären Punkte zunächst genau gleich, und man gelangt zur Bedingung $y^2 = r_1$ und $y^2 = r_2$, die nicht beide zugleich erfüllt sein können. Bei unterschiedlichen Radien ist die Schnittkurve also glatt.

Potenzreihenringe

Definition 24.4. Sei R ein kommutativer Ring und $T_1, \ldots, T_n$ eine Menge von Variablen. Eine *formale Potenzreihe* ist ein Ausdruck der Form

$$F = \sum_\nu a_\nu T^\nu = \sum_\nu a_\nu T_1^{\nu_1} \cdots T_n^{\nu_n}.$$

wobei $a_\nu \in R$ für alle $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$ ist.

Man addiert zwei Potenzreihen komponentenweise und multipliziert sie in der gleichen Weise wie Polynome. In einer Variablen hat man

$$F \cdot G = \left(\sum\nolimits_{i=0}^\infty a_i T^i\right) \left(\sum\nolimits_{j=0}^\infty b_j T^j\right) = \sum\nolimits_{k=0}^\infty c_k T^k$$

mit $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$.

Definition 24.5. Sei R ein kommutativer Ring. Dann bezeichnet man mit

$$R[[X_1, \ldots, X_n]]$$

den *Potenzreihenring in n Variablen* (oder den *Ring der formalen Potenzreihen in n Variablen*).

Wir interessieren uns hauptsächlich für den Potenzreihenring $K[[T]]$ in einer Variablen über einem Körper K. Mit Hilfe von Potenzreihenringen kann man „formale Parametrisierungen“ für beliebige algebraische Kurven in jedem Punkt finden, was wir in der nächsten Vorlesung behandeln werden. Zunächst müssen wir einige grundlegende Eigenschaften der Potenzreihenringe verstehen.

Satz 24.6. *Sei K ein Körper und sei $K[[T]]$ der Ring der formalen Potenzreihen in einer Variablen. Dann ist eine formale Potenzreihe $F = \sum_{n=0}^\infty a_n T^n$ genau dann eine Einheit, wenn der konstante Term $a_0 \neq 0$ ist.*

Beweis. Die angegebene Bedingung ist notwendig, da die Abbildung

$$K[[T]] \longrightarrow K,\ F \longmapsto a_0,$$

die eine Potenzreihe F auf ihren konstanten Term schickt, ein Ringhomomorphismus ist. Für die Umkehrung müssen wir eine Potenzreihe $G = \sum_{j=0}^{\infty} b_j T^j$ mit

$$FG = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j T^j\right) = 1$$

angeben. Für b_0 ergibt sich daraus die Bedingung $a_0 b_0 = 1$, die wegen $a_0 \neq 0$ eine eindeutige Lösung besitzt, nämlich $b_0 = a_0^{-1}$. Nehmen wir induktiv an, dass die Koeffizienten b_j für $j < n$ schon konstruiert seien, und zwar derart, dass sämtliche Koeffizienten c_k, $1 \leq k < n$, der Produktreihe FG gleich 0 sind. Für den n-ten Koeffizienten ergibt sich die Bedingung

$$0 = c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0.$$

Dabei sind bis auf b_n alle Werte festgelegt, und wegen $a_0 \neq 0$ ergibt sich eine eindeutige Lösung für b_n. ☐

Korollar 24.7. *Sei K ein Körper und $R = K[[T]]$ der Potenzreihenring in einer Variablen. Dann ist R ein diskreter Bewertungsring.*

Beweis. Zunächst ist R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = (T)$. Wenn nämlich eine Potenzreihe F keine Einheit ist, so muss nach Satz 24.6 der konstante Term von F gleich 0 sein. Dann kann man aber $F = T\tilde{F}$ mit der umindizierten Potenzreihe $\tilde{F}$ schreiben. Die Nullteilerfreiheit folgt durch Betrachten der Anfangsterme: Sind F und G von 0 verschiedene Potenzreihen, so ist

$$F = a_k T^k + a_{k+1} T^{k+1} + \ldots$$

und

$$G = b_\ell T^\ell + a_{\ell+1} T^{\ell+1} + \ldots$$

mit $a_k, b_\ell \neq 0$. Für die Produktreihe ist dann der Koeffizient

$$c_{k+\ell} = a_k b_\ell \neq 0,$$

da die kleineren Koeffizienten alle 0 sind. Es bleibt also noch noethersch zu zeigen. Es ergibt sich aber direkt, dass ein Hauptidealbereich vorliegt, und zwar wird jedes Ideal $\neq 0$ von T^j erzeugt, wobei j das Minimum über alle Indizes von Koeffizienten $\neq 0$ von Potenzreihen in dem Ideal ist. ☐

Man kann Potenzreihen nicht nur addieren und multiplizieren, sondern auch, unter gewissen Zusatzbedingungen, Potenzreihen in andere Potenzreihen einsetzen. Diese Operation entspricht der Hintereinanderschaltung von Abbildungen.

Definition 24.8. Es sei K ein Körper und $F = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \in K[[T]]$ eine Potenzreihe. Es sei $G = \sum_{j=0}^{\infty} b_j T^j$ eine weitere Potenzreihe mit konstantem Term 0. Dann nennt man die Potenzreihe

$$\begin{aligned} F(G) &= a_0 + a_1\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j T^j\right) + a_2\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j T^j\right)^2 + a_3\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j T^j\right)^3 + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k T^k \end{aligned}$$

die *eingesetzte Potenzreihe*. Ihre Koffizienten sind durch

$$c_k = \sum_{s=0}^{k} a_s \left(\sum_{j_1+\cdots+j_s=k} b_{j_1} \cdots b_{j_s} \right)$$

festgelegt. Hierbei wird über alle geordneten s-Tupel $(j_1, \ldots, j_s) \in \mathbb{N}_+^s$ summiert.

Man beachte in der vorstehenden Definition, dass wegen $b_0 = 0$ nur über $j \geq 1$ summiert wird, so dass alle beteiligten Summen endlich sind. Die Formeln für das Einsetzen sind derart, dass sie bei Polynomen das übliche Einsetzen von Polynomen in Polynome ergeben. Einsetzen von Potenzreihen in Potenzreihen liefert wieder einen Einsetzungshomomorphismus der Potenzreihenringe.

Lemma 24.9. *Sei K ein Körper mit dem Potenzreihenring $K[[T]]$. Es sei $G \in K[[S]]$ eine Potenzreihe mit konstantem Term 0. Dann definiert G durch Einsetzen einen K-Algebrahomomorphismus*

$$K[[T]] \longrightarrow K[[S]],\ F \longmapsto F(G).$$

Beweis. Die Abbildung ist wohldefiniert. Um zu zeigen, dass ein Ringhomomorphismus vorliegt, muss man lediglich gewisse Koeffizienten vergleichen. Diese hängen immer nur von endlich vielen Koeffizienten der beteiligten Potenzreihen an, so dass sich diese Aussage aus dem polynomialen Fall ergibt. □

Lemma 24.10. *Sei K ein Körper, $K[[T]]$ der Potenzreihenring über K und $G = \sum_{j=0}^{\infty} b_j T^j$ mit $b_0 = 0$ und $b_1 \neq 0$. Dann definiert der durch $T \mapsto G$ definierte Einsetzungshomomorpismus einen K-Algebraautomorphismus auf $K[[T]]$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass es eine Potenzreihe $F = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i$ mit $F(G) = T$ gibt. Dabei muss $a_0 = 0$ und $a_1 = b_1^{-1}$ sein. Sei nun die Potenreihe F mit der gewünschten Eigenschaft bis zum $(k-1)$-Koeffizienten bereits konstruiert. Für den Koeffizienten c_k hat man nach der Definition 24.8 die Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &= c_k \\ &= \sum_{s=0}^{k} a_s \left(\sum_{j_1+\cdots+j_s=k} b_{j_1} \cdots b_{j_s} \right) \\ &= \sum_{s=0}^{k-1} a_s \left(\sum_{j_1+\cdots+j_s=k} b_{j_1} \cdots b_{j_s} \right) + a_k b_1^k . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich eine eindeutig lösbare Bedingung an a_k.

Wir betrachten nun die Hintereinanderschaltung

$$K[[T]] \xrightarrow{T \mapsto F} K[[T]] \xrightarrow{T \mapsto G} K[[T]] .$$

Dabei ist die Gesamtabbildung der Einsetzungshomomorphismus $T \mapsto T$, und das ist die Identität. Insbesondere ist die hintere Abbildung surjektiv. Da $K[[T]]$ nach Korollar 24.7 ein diskreter Bewertungsring, sind die Ideale darin bekannt, und nur das Nullideal kommt als Kern der Abbildung in Frage. Die Abbildung ist also auch injektiv und damit bijektiv. $\square$