

Algebraische Kurven

Zum Sehen geboren, Zum
Schauen bestellt,

Johann Wolfgang von Goethe

Das K -Spektrum



Alexander Grothendieck (1928-2014)

Wie hängen affin-algebraische Mengen und deren Koordinatenringe zusammen? Hier kann man nur für nicht-endliche Grundkörper gehaltvolle Antworten erwarten, da es im endlichen Fall zu wenige Punkte gibt. Eine befriedigende Theorie erfordert sogar, dass man sich auf algebraisch abgeschlossene Körper beschränkt, oder aber - das ist der Standpunkt der von Alexander Grothendieck entwickelten Schematheorie - nicht nur K -Punkte betrachtet, sondern generell maximale Ideale und Primideale als Punkte mitberücksichtigt.

Eine erste wichtige Frage ist folgende: Eine K -Algebra R von endlichem Typ hat mehrere, in aller Regel gleichberechtigte Darstellungen als Restklassenring einer Polynomalgebra, sagen wir

$$K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a} \cong R \cong K[X_1, \dots, X_m]/\mathfrak{b}.$$

Dazu gehören die beiden Nullstellengebilde $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ und $V(\mathfrak{b}) \subseteq \mathbb{A}_K^m$. Wie hängen diese beiden Nullstellengebilde zusammen?

BEISPIEL 12.1. Wir betrachten den Polynomring in einer Variablen $R = K[T]$. Ihm entspricht zunächst die affine Gerade \mathbb{A}_K^1 . Man kann R aber auch auf ganz verschiedene Arten als Restklassenring einer Polynomalgebra in mehreren Variablen erhalten. Sei beispielsweise $a \in K$, $a \neq 0$, und betrachte den Restklassenring $K[X, Y]/(aY + bX)$. Dieser Ring ist (als K -Algebra) isomorph zu R , wie die Abbildung

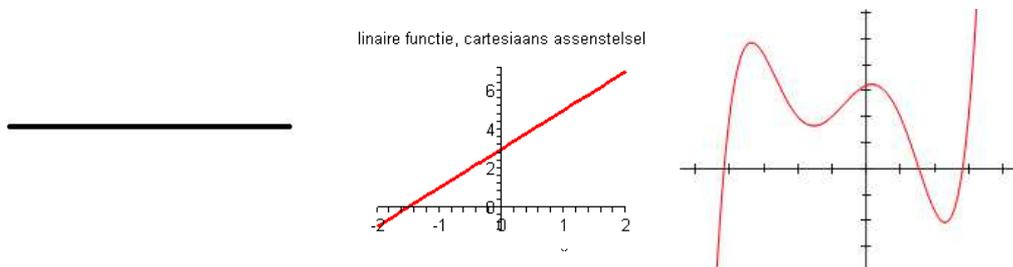
$$K[X, Y]/(aY + bX) \longrightarrow K[T], X \longmapsto T, Y \longmapsto -\frac{b}{a}T,$$

zeigt. Das zugehörige Nullstellengebilde $V(aX + bY) \subset \mathbb{A}^2$ ist einfach die Gerade in der affinen Ebene, die durch die Gleichung $Y = -\frac{b}{a}X$ beschrieben wird.

Eine weitere Möglichkeit, den Polynomring in einer Variablen als Restklassenring darzustellen, ist durch $K[X, Y]/(Y - P(X))$ gegeben, wobei $P(X)$ ein beliebiges Polynom in der einen Variablen X ist. Der Ringhomomorphismus

$$K[X, Y]/(Y - P(X)) \longrightarrow K[T], X \longmapsto T, Y \longmapsto P(T),$$

zeigt, dass wieder ein Isomorphismus zum Polynomring in einer Variablen vorliegt. Das zugehörige Nullstellengebilde ist einfach der Graph des Polynoms $P(X)$.



Der Punkt an diesem Beispiel ist, dass alle drei geometrischen Objekte die Nullstellenmengen zu verschiedenen Restklassendarstellungen von $K[T]$ sind. Vom Standpunkt der algebraischen Geometrie sind das drei gleichberechtigte Darstellungen der affinen Geraden, auch wenn sie unterschiedlich „aussehen“. In der algebraischen Geometrie muss man so hinschauen, dass sie gleich aussehen. Was man sieht sind nur verschiedene Einbettungen des „eigentlichen und wahren“ geometrischen Objektes, das zu einer K -Algebra intrinsisch gehört, nämlich das K -Spektrum.

DEFINITION 12.2. Zu einer kommutativen K -Algebra R von endlichem Typ bezeichnet man die Menge der K -Algebrahomomorphismen

$$\text{Hom}_K(R, K)$$

als das *Spektrum* von R . Es wird mit $K\text{-Spek}(R)$ bezeichnet.

Die Elemente in einem K -Spektrum $K\text{-Spek}(R)$ betrachten wir als Punkte und bezeichnen sie üblicherweise mit P , obwohl es definitionsgemäß Abbildungen sind, nämlich K -Algebrahomomorphismen von R nach K . Für ein Ringelement $f \in R$ schreiben wir dann auch einfach $f(P)$ (statt $P(f)$) für den Wert von f unter dem mit P bezeichneten Ringhomomorphismus (es ist nicht unüblich, einen Punkt als eine Auswertung von Funktionen anzusehen, die in einer gewissen Umgebung des Punktes definiert sind).

Das K -Spektrum wird wieder mit einer *Zariski-Topologie* versehen, wobei zu einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ (oder zu einer beliebigen Teilmenge aus R) die Teilmenge

$$V(\mathfrak{a}) = \{P \in K\text{-Spek}(R) \mid f(P) = 0 \text{ für alle } f \in \mathfrak{a}\}$$

als abgeschlossen erklärt wird. In der Tat wird dadurch eine Topologie definiert, siehe Aufgabe 12.6. Die komplementären offenen Mengen werden mit $D(\mathfrak{a})$ bezeichnet.

LEMMA 12.3. *Sei K ein Körper und sei $K[X_1, \dots, X_n]$ der Polynomring in n Variablen. Dann stehen die K -Algebrahomomorphismen von $K[X_1, \dots, X_n]$ nach K in natürlicher Weise in Bijektion mit den Punkten aus dem affinen Raum $\mathbb{A}_K^n = K^n$, und zwar entspricht dem Punkt (a_1, \dots, a_n) der Einsetzungshomomorphismus $X_i \mapsto a_i$. Mit anderen Worten,*

$$K\text{-Spek}(K[X_1, \dots, X_n]) = \mathbb{A}_K^n.$$

Beweis. Ein K -Algebrahomomorphismus ist stets durch ein K -Algebra-Erzeugendensystem festgelegt. D.h. die Werte an den Variablen X_i legen einen K -Algebrahomomorphismus von $K[X_1, \dots, X_n]$ nach K fest. Ein solcher Einsetzungshomomorphismus ist durch $X_i \mapsto a_i$ definiert. Zugleich ist hier jede Vorgabe von Werten (a_1, \dots, a_n) erlaubt. \square

BEISPIEL 12.4. Das K -Spektrum zur K -Algebra K besteht einfach aus einem Punkt, und zwar ist die Identität $K \rightarrow K$ der einzige K -Algebrahomomorphismus von K nach K . Es gibt im Allgemeinen weitere Körperautomorphismen auf K , doch diese sind keine K -Algebrahomomorphismen.

Entscheidend ist nun der folgende Satz, der eine bijektive Beziehung zwischen dem K -Spektrum von R und dem Nullstellengebilde stiftet, das von einer Restklassendarstellung von R herrührt.

SATZ 12.5. *Sei K ein Körper und sei R eine endlich erzeugte kommutative K -Algebra mit K -Spektrum $K\text{-Spek}(R)$. Es sei $R = K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$ eine Restklassendarstellung von R mit dem zugehörigen Restklassenhomomorphismus*

$$\varphi: K[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow R$$

und dem Nullstellengebilde $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$. Dann stiftet die Abbildung

$$K\text{-Spek}(R) \longrightarrow \mathbb{A}_K^n, P \longmapsto P \circ \varphi$$

eine Bijektion zwischen $K\text{-Spek}(R)$ und $V(\mathfrak{a})$, die bezüglich der Zariski-Topologie ein Homöomorphismus ist.

Beweis. Zunächst ist die angegebene Abbildung wohldefiniert, da die Hintereinanderschaltung

$$P \circ \varphi : K[X_1, \dots, X_n] \xrightarrow{\varphi} K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a} \cong R \xrightarrow{P} K$$

einen K -Algebrahomomorphismus vom Polynomring nach K definiert, der nach Lemma 12.3 der Einsetzungshomomorphismus zu (a_1, \dots, a_n) ist und mit dem entsprechenden Punkt des affinen Raumes identifiziert werden kann (und zwar ist $a_i = P(\varphi(X_i))$).

Da der Homomorphismus $P \circ \varphi$ durch R faktorisiert, wird das Ideal \mathfrak{a} auf 0 abgebildet. D.h. der Bildpunkt $P \circ \varphi = (a_1, \dots, a_n)$ liegt in $V(\mathfrak{a})$, und es liegt eine Abbildung

$$K\text{-Spek}(R) \longrightarrow V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n, P \longmapsto P \circ \varphi$$

vor, die wir als bijektiv nachweisen müssen.

Seien dazu $P_1, P_2 \in K\text{-Spek}(R)$ zwei verschiedene Punkte. Es liegen also zwei verschiedene K -Algebrahomomorphismen vor, und da ein K -Algebrahomomorphismus auf einem K -Algebra-Erzeugendensystem festgelegt ist, müssen sich die beiden auf mindestens einer Variablen unterscheiden. Dann ist aber auch der Wert der zugehörigen Koordinate verschieden, d.h. $P_1 \circ \varphi \neq P_2 \circ \varphi$, und die Abbildung ist injektiv.

Zur Surjektivität sei ein Punkt $(a_1, \dots, a_n) \in V(\mathfrak{a})$ vorgegeben. Der zugehörige K -Algebrahomomorphismus

$$K[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow K, X_i \longmapsto a_i,$$

annulliert daher jedes $F \in \mathfrak{a}$, so dass dieser Ringhomomorphismus durch $K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$ faktorisiert. Dieser Ringhomomorphismus ist das gesuchte Urbild aus $K\text{-Spek}(R)$.

Zur Topologie muss man einfach nur beachten, dass für $G \in R$ und ein Urbild $\tilde{G} \in K[X_1, \dots, X_n]$ und einen Punkt $P \in K\text{-Spek}(R)$ mit Bildpunkt $\tilde{P} = P \circ \varphi \in V(\mathfrak{a})$ gilt:

$$G(P) = P(G) = P(\varphi(\tilde{G})) = (P \circ \varphi)(\tilde{G}) = \tilde{G}(\tilde{P}),$$

so dass auch die Nullstellen übereinstimmen. □

Dieser Satz besagt also, dass man jedes K -Spektrum einer endlich erzeugten K -Algebra R mit einer Zariski-abgeschlossenen Menge eines \mathbb{A}_K^n identifizieren kann. Man spricht von einer *abgeschlossenen Einbettung*.

KOROLLAR 12.6. *Sei K ein Körper und R eine endlich erzeugte kommutative K -Algebra mit zwei Restklassendarstellungen*

$$R \cong K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a} \text{ und } R \cong K[X_1, \dots, X_m]/\mathfrak{b}$$

mit zugehörigen Nullstellengebilden $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ und $V(\mathfrak{b}) \subseteq \mathbb{A}_K^m$. Dann sind die beiden Nullstellengebilde $V(\mathfrak{a})$ und $V(\mathfrak{b})$ mit ihrer induzierten Zariski-Topologie homöomorph zueinander.

Beweis. Nach Satz 12.5 sind beide Nullstellengebilde homöomorph zu $K - \text{Spek}(R)$, so dass sie auch untereinander homöomorph sein müssen. \square

Wenn R der Nullring ist, so ist das K -Spektrum davon leer. Wenn K nicht algebraisch abgeschlossen ist, so kann das Spektrum auch zu anderen Ringen leer sein. Wenn aber K ein algebraisch abgeschlossener Körper ist, so ist bei $R \neq 0$ das Spektrum auch nicht leer. In der Tat gilt unter dieser Voraussetzung wieder ein Hilbertscher Nullstellensatz, siehe Aufgabe 12.8.

Das K -Spektrum als Funktor

SATZ 12.7. *Sei K ein Körper und seien R und S kommutative K -Algebren von endlichem Typ. Es sei $\varphi: R \rightarrow S$ ein K -Algebrahomomorphismus. Dann induziert dies eine Abbildung*

$$\varphi^*: K\text{-Spek}(S) \longrightarrow K\text{-Spek}(R), P \longmapsto P \circ \varphi.$$

Diese Abbildung ist stetig bezüglich der Zariski-Topologie.

Beweis. Die Existenz der Abbildung ist klar, dem K -Algebrahomomorphismus

$$P: S \longrightarrow K$$

wird einfach die Hintereinanderschaltung

$$R \xrightarrow{\varphi} S \xrightarrow{P} K$$

zugeordnet. Das Urbild der offenen Menge $D(f) \subseteq K\text{-Spek}(R)$ ist dabei

$$\begin{aligned} (\varphi^*)^{-1}(D(f)) &= \{P \in K\text{-Spek}(S) \mid \varphi^*(P) \in D(f)\} \\ &= \{P \in K\text{-Spek}(S) \mid P \circ \varphi \in D(f)\} \\ &= \{P \in K\text{-Spek}(S) \mid (P \circ \varphi)(f) \neq 0\} \\ &= \{P \in K\text{-Spek}(S) \mid P(\varphi(f)) \neq 0\} \\ &= D(\varphi(f)). \end{aligned}$$

Daher sind generell Urbilder von offenen Mengen wieder offen und die Abbildung ist stetig. \square

Die in Satz 12.7 eingeführte Abbildung φ^* nennt man die *Spektrumsabbildung* zu φ .

PROPOSITION 12.8. *Es sei K ein Körper und zu einem K -Algebrahomomorphismus $\varphi: R \rightarrow S$ zwischen K -Algebren von endlichem Typ sei φ^* die zugehörige Spektrumsabbildung. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Zu einem K -Algebrahomomorphismus $P: R \rightarrow K$ ist die induzierte Spektrumsabbildung P^* einfach die Abbildung, die dem einzigen Punkt $\{\text{id}\} = K\text{-Spek}(K)$ den Punkt $P \in K\text{-Spek}(R)$ zuordnet.*

- (2) *Der durch ein Element $F \in R$ definierte Einsetzungshomomorphismus*

$$\varphi: K[T] \longrightarrow R, T \longmapsto F,$$

induziert die Spektrumsabbildung

$$\varphi^*: K\text{-Spek}(R) \longrightarrow K\text{-Spek}(K[T]) = \mathbb{A}_K^1, P \longmapsto F(P).$$

- (3) *Zu einer surjektiven Abbildung $\varphi: R \rightarrow S$ von K -Algebren von endlichem Typ ist die zugehörige Spektrumsabbildung*

$$\varphi^*: K\text{-Spek}(S) \longrightarrow K\text{-Spek}(R)$$

eine abgeschlossene Einbettung, und zwar ist das Bild gleich $V(\ker(\varphi))$.

- (4) *Die zu einer surjektiven Abbildung $K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow S$ gehörende Spektrumsabbildung*

$$\varphi^*: K\text{-Spek}(S) \longrightarrow K\text{-Spek}(K[X_1, \dots, X_n]) \cong \mathbb{A}_K^n$$

stimmt mit der in Satz 12.5 definierten Abbildung überein.

- (5) *Es seien $F_i \in K[X_1, \dots, X_n]$ für $i = 1, \dots, m$ und es sei*

$$\varphi: K[Y_1, \dots, Y_m] \longrightarrow K[X_1, \dots, X_n], Y_i \longmapsto F_i,$$

der zugehörige Einsetzungshomomorphismus. Dann stimmt die Spektrumsabbildung

$$\varphi^*: \mathbb{A}_K^m = K\text{-Spek}(K[Y_1, \dots, Y_m]) \longrightarrow \mathbb{A}_K^n = K\text{-Spek}(K[X_1, \dots, X_n])$$

(über die Identifizierung aus Lemma 12.3) mit der direkten polynomialen Abbildung

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n))$$

überein.

Beweis. (1) Dies folgt aus $\text{Id} \circ P = P$.

- (2) Unter der hintereinandergeschalteten Abbildung

$$K[T] \xrightarrow{\varphi} R \xrightarrow{P} K$$

wird T auf $P(F) = F(P)$ geschickt.

- (3) beruht auf ähnlichen Betrachtungen, wie sie im Beweis zu Satz 12.5 durchgeführt wurden. Das zeigt auch (4). Zu (5) siehe Aufgabe 12.16. \square

Die unter (2) formulierte Aussage besagt insbesondere, dass man die Elemente des Ringes R als Funktionen auf dem K -Spektrum $K\text{-Spek}(R)$ nach \mathbb{A}_K^1 auffassen kann. Wir haben also ein geometrisches Objekt eingeführt, mit dem man Ringelemente als Funktionen realisieren kann.

Weitere Eigenschaften des K -Spektrums

LEMMA 12.9. Sei K ein Körper und R eine endlich erzeugte kommutative K -Algebra. Dann ist

$$K\text{-Spek}(R[X]) \cong K\text{-Spek}(R) \times \mathbb{A}_K^1.$$

Beweis. Ein K -Algebrahomomorphismus $R[T] \rightarrow K$ induziert einen K -Algebrahomomorphismus $R \rightarrow K$, und zugleich wird T auf ein bestimmtes Element $a \in K$ abgebildet. Diese Daten definieren aber auch einen eindeutig bestimmten K -Algebrahomomorphismus $R[T] \rightarrow K$. \square

Achtung: Die vorstehende Aussage liefert nur eine natürliche Bijektion auf der Punktebene. Würde man die Produktmenge rechts mit der Produkttopologie versehen, so würde hier keine Homöomorphie mit der Zariski-Topologie links vorliegen. Insbesondere ist $\mathbb{A}_K^2 = \mathbb{A}_K^1 \times \mathbb{A}_K^1$, aber die Zariski-Topologie der affinen Ebene ist nicht die Produkt-Topologie der affinen Geraden mit sich selbst.

BEMERKUNG 12.10. Sind $X = \text{Spek}(R)$ und $Y = \text{Spek}(S)$, so lässt sich die Produktmenge $X \times Y$ ebenfalls als K -Spektrum einer K -Algebra darstellen, und zwar ist

$$X \times Y \cong K\text{-Spek}(R \otimes_K S),$$

wobei \otimes das Tensorprodukt bezeichnet. Wir werden darauf nicht im Einzelnen eingehen. Um aber doch ein Gefühl dafür zu geben betrachten wir $R = K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$ und $S = K[Y_1, \dots, Y_m]/\mathfrak{b}$. Dann ist

$$R \otimes_K S \cong K[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$$

(bei dieser ad hoc Definition ist nicht klar, dass sie unabhängig von den Darstellungen als Restklassenring ist).

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Alexander Grothendieck.jpg , Autor = Konrad Jacobs, Lizenz = CC-BY-SA 2.0	1
Quelle = Linline.jpg , Autor = Astur1, Lizenz = PD	2
Quelle = Lineair-cartesiaans.png , Autor = MADe, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	2
Quelle = Polynomialdeg5.png , Autor = Benutzer Derbeth auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	2