

Algebraische Kurven

Vorlesung 10

Noethersche Moduln

Wir wollen zeigen, dass für einen noetherschen Ring R und einen endlich erzeugten R -Modul jeder R -Untermodule wieder endlich erzeugt ist. Solche Moduln nennt man noethersch.

DEFINITION 10.1. Sei R ein kommutativer Ring und M ein R -Modul. Dann heißt M *noethersch*, wenn jeder R -Untermodule von M endlich erzeugt ist.

Für $M = R$ stimmt dies mit der Definition eines noetherschen Ringes überein, da ja die R -Untermodule von R gerade die Ideale sind.

In den folgenden Aussagen verwenden wir folgende Sprech- bzw. Schreibweise.

DEFINITION 10.2. Sei R ein kommutativer Ring und seien M_1, M_2, M_3 R -Moduln. Man nennt ein Diagramm der Form

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

eine *kurze exakte Sequenz* von R -Moduln, wenn M_1 ein R -Untermodule von M_2 ist, und wenn M_3 ein Restklassenmodule von M_2 ist, der isomorph zu M_2/M_1 ist.

Die Exaktheit bedeutet, dass an jeder Stelle die Beziehung

$$\text{kern } \varphi_{i+1} = \text{bild } \varphi_i$$

gilt, wenn φ_i die R -Modulhomomorphismen bezeichnet.

LEMMA 10.3. Sei R ein kommutativer Ring und

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln. Dann ist M genau dann noethersch, wenn sowohl M_1 als auch M_3 noethersch sind.

Beweis. Sei zunächst M noethersch, und $U \subseteq M_1$ ein Untermodule. Dann ist U direkt auch ein Untermodule von M , also nach Voraussetzung endlich erzeugt. Sei nun $V \subseteq M_3$ ein Untermodule des Restklassenmoduls. Das Urbild von V in M unter der Restklassenabbildung sei \tilde{V} . Dieser Modul ist nach Voraussetzung endlich erzeugt, und die Bilder eines solchen Erzeugendensystems erzeugen auch den Bildmodule V .

Seien nun die äußeren Moduln M_1 und M_3 noethersch, und sei $U \subseteq M$ ein Untermodul. Es sei $U_3 \subseteq M_3$ der Bild-Untermodul davon. U_3 wird von endlich vielen Elementen s_1, \dots, s_n erzeugt, und wir können annehmen, dass diese $s_i = \bar{r}_i$ die Bilder von Elementen $r_i \in U$ sind. Betrachte $U \cap M_1$. Dies ist ein Untermodul von M_1 , und daher endlich erzeugt, sagen wir von t_1, \dots, t_k , die wir als Elemente in U auffassen. Wir behaupten, dass

$$r_1, \dots, r_n, t_1, \dots, t_k$$

ein Erzeugendensystem von U bilden. Sei dazu $m \in U$ ein beliebiges Element. Dann ist $\bar{m} = \sum_{i=1}^n a_i s_i$ und daher geht das Element $m - \sum_{i=1}^n a_i r_i$ rechts auf 0. Dann gehört es aber zum Kern der Restklassenabbildung, also zu M_1 . Andererseits gehört dieses Element auch zu U , also zum Durchschnitt $M_1 \cap U$, der ja von den t_1, \dots, t_k erzeugt wird. Also kann man

$$m - \sum_{i=1}^n a_i r_i = \sum_{j=1}^k b_j t_j$$

bzw. $m = \sum_{i=1}^n a_i r_i + \sum_{j=1}^k b_j t_j$ schreiben. □

SATZ 10.4. *Sei R ein noetherscher kommutativer Ring und M ein endlich erzeugter R -Modul. Dann ist M ein noetherscher Modul.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Anzahl n der Modul erzeuger von M . Bei $n = 0$ liegt der Nullmodul vor. Sei $n = 1$. Dann gibt es eine surjektive Abbildung $R \rightarrow M \cong R/\mathfrak{a}$. Nach Lemma 10.3 ist aber ein Restklassenmodul eines noetherschen Moduls wieder noethersch, und der Ring selbst ist nach Voraussetzung noethersch, also ist M noethersch.

Sei nun $n \geq 2$ und die Aussage für kleinere n bereits bewiesen. Sei m_1, \dots, m_n ein Erzeugendensystem von M . Wir betrachten den durch m_1, \dots, m_{n-1} erzeugten R -Untermodul, den wir mit M_1 bezeichnen. Dieser Untermodul gibt Anlass zu einer kurzen exakten Sequenz, nämlich

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M/M_1 =: M_3 \longrightarrow 0.$$

Hier wird der linke Modul von $n - 1$ Elementen erzeugt und ist nach Induktionsvoraussetzung noethersch. Der rechte Modul wird von der Restklasse von m_n , also von einem Element erzeugt, ist also auch noethersch. Nach Lemma 10.3 ist dann M noethersch. □

Hilbertscher Nullstellensatz - algebraische Version

Im Folgenden werden für eine R -Algebra A die Begriffe endlich und endlich erzeugt wichtig sein. Ersteres bedeutet, dass A , aufgefasst als R -Modul, endlich erzeugt ist, das zweite, dass A als Algebra endlich erzeugt ist. Der Polynomring $R[X_1, \dots, X_n]$ ist im letzteren Sinne endlich erzeugt, und zwar

bilden die Variablen ein endliches Algebra-Erzeugendensystem. Der Polynomring ist aber nicht als Modul endlich erzeugt, das einfachste Modul-Erzeugendensystem ist durch alle Monome gegeben.

Wir wollen die algebraische Version des Hilbertschen Nullstellensatzes beweisen. Dazu benötigen wir die folgenden beiden Lemmata.

LEMMA 10.5. *Sei R ein noetherscher kommutativer Ring und A eine endlich erzeugte R -Algebra. Es sei $B \subseteq A$ eine R -Unteralgebra, über der A endlich (als B -Modul) sei. Dann ist auch B eine endlich erzeugte R -Algebra.*

Beweis. Wir schreiben $A = R[x_1, \dots, x_n]$ und $A = Ba_1 + \dots + Ba_m$ mit $a_i \in A$. Wir setzen $x_i = \sum_{j=1}^m b_{ij}a_j$ und $a_i a_j = \sum_{k=1}^m b_{ijk}a_k$ mit Koeffizienten $b_{ij}, b_{ijk} \in B$. Wir betrachten die von diesen Koeffizienten erzeugte R -Unteralgebra S von B und den S -Untermodule $\tilde{A} = Sa_1 + \dots + Sa_m \subseteq A$. Die Produkte $a_i a_j$ gehören wieder zu diesem Modul, daher ist \tilde{A} sogar eine S -Algebra. Weil die x_i ebenfalls zu \tilde{A} gehören, gilt sogar $A = \tilde{A}$. Dies bedeutet, dass A ein endlicher S -Modul ist. Nach Korollar 9.9 ist S ein noetherscher Ring und nach Satz 10.4 ist der S -Untermodule $B \subseteq A$ ebenfalls endlicher S -Modul. Die Kette $R \subseteq S \subseteq B$ zeigt schließlich, dass B eine endlich erzeugte R -Algebra ist. \square

LEMMA 10.6. *Sei K ein Körper und $R = K(X)$ der zugehörige rationale Funktionenkörper. Dann ist R keine endlich erzeugte K -Algebra.*

Beweis. Sei angenommen, dass die rationalen Funktionen $F_i = \frac{P_i}{Q_i}$, $i = 1, \dots, n$, ein endliches Erzeugendensystem von $K(X)$ bilden, mit $P_i, Q_i \in K[X]$, $Q_i \neq 0$. Durch Übergang zu einem Hauptnenner kann man annehmen, dass $Q_i = Q$ konstant ist. Die Annahme bedeutet also insbesondere, dass der Körper der rationalen Funktionen sich durch Nenneraufnahme an nur einem Element ergeben würde. Da Q keine Konstante ist (sonst wäre $K[X] = K(X)$, was nicht der Fall ist), ist $Q - 1 \neq 0$ und daher ist $\frac{1}{Q-1} \in K(X)$. Also gibt es eine Darstellung

$$\frac{1}{Q-1} = \frac{P}{Q^s}$$

mit einem geeigneten s . Daraus folgt $Q^s = (Q-1)P$. Da Q^s und $Q-1$ das Einheitsideal in $K[X]$ erzeugen, folgt daraus, dass bereits $Q-1$ das Einheitsideal erzeugt, also selbst eine Einheit ist. Dann wäre Q aber doch eine Konstante, was es nicht ist. \square

Die folgende Aussage ist die algebraische Version des Hilbertschen Nullstellensatzes.

SATZ 10.7. *Sei K ein Körper und sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, die (als K -Algebra) endlich erzeugt sei. Dann ist L endlich über K .*

Beweis. Wir setzen $L = K[x_1, \dots, x_n]$. Sei K_i der Quotientenkörper von $K[x_1, \dots, x_i]$ (innerhalb von L). Wir haben also eine Körperkette

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n = L.$$

Wir wollen zeigen, dass L endlich über K ist, und dazu genügt es nach Satz 2.8 (Körper- und Galoistheorie (Osnabrück 2011)) zu zeigen, dass jeder Schritt in der Körperkette endlich ist. Sei angenommen, dass $K_i \subseteq K_{i+1}$ nicht endlich ist, aber alle folgenden Schritte endlich sind. Wir wenden Lemma 10.5 auf

$$K \subseteq K_{i+1} \subset L$$

an und erhalten, dass K_{i+1} endlich erzeugt über K ist. Dann ist insbesondere K_{i+1} auch endlich erzeugt über K_i . Andererseits ist K_{i+1} der Quotientenkörper von $K_i[x_{i+1}]$. Wir haben also eine Kette

$$K_i \subseteq K_i[x_{i+1}] \subseteq Q(K_i[x_{i+1}]) = K_{i+1},$$

wo K_{i+1} endlich erzeugt über K_i ist, aber nicht endlich. Wäre x_{i+1} algebraisch über K_i , so auch endlich, und dann wäre $K_i[x_{i+1}]$ bereits ein Körper nach Aufgabe 10.1. Dann wäre die letzte Kette insgesamt endlich, im Widerspruch zur Wahl von i . Also ist x_{i+1} transzendent über K_i . Dann ist aber $K_i[x_{i+1}]$ isomorph zu einem Polynomring in einer Variablen und $Q(K_i[x_{i+1}])$ ist isomorph zum rationalen Funktionenkörper über K_i . Dieser ist aber nach Lemma 10.6 nicht endlich erzeugt, so dass sich erneut ein Widerspruch ergibt. \square

SATZ 10.8. *Sei K ein Körper und seien A und B zwei K -Algebren von endlichem Typ. Es sei $\varphi: A \rightarrow B$ ein K -Algebrahomomorphismus. Dann ist für jedes maximale Ideal \mathfrak{m} aus B auch das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ ein maximales Ideal.*

Beweis. Sei \mathfrak{m} ein maximales Ideal aus B . Wir wissen nach Aufgabe 4.15, dass unter jedem Ringhomomorphismus das Urbild eines Primideals wieder prim ist, also ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ zunächst ein Primideal, das wir \mathfrak{p} nennen. Wir erhalten induzierte Ringhomomorphismen

$$K \longrightarrow A/\mathfrak{p} \longrightarrow B/\mathfrak{m} = L,$$

wobei L ein Körper ist und wobei beide Homomorphismen injektiv und von endlichem Typ sind. Da die Gesamtabbildung von endlichem Typ ist und K und L Körper sind, folgt aus Satz 10.7, dass diese Abbildung endlich ist. Wir wollen zeigen, dass der Zwischenring A/\mathfrak{p} ein Körper ist. Dies folgt aber aus Aufgabe 10.2. \square

SATZ 10.9. *Sei K ein Körper und sei A eine K -Algebra von endlichem Typ. Dann ist jedes Radikal in A der Durchschnitt von maximalen Idealen.*

Beweis. Nach Aufgabe 10.17 ist jedes Radikal der Durchschnitt von Primidealen. Es genügt also zu zeigen, dass jedes Primideal in einer endlich erzeugten Algebra der Durchschnitt von maximalen Idealen ist. Sei \mathfrak{p} ein Primideal und $f \notin \mathfrak{p}$. Dann ist \mathfrak{p} ein Primideal in der Nenneraufnahme $B := A_f$. Es

gibt ein (in A_f) maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset A_f$ oberhalb von $\mathfrak{p}A_f$. Wir fassen A_f als endlich erzeugte K -Algebra auf und betrachten

$$\varphi: A \longrightarrow A_f.$$

Dann ist $\mathfrak{p} \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ und $f \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$. Nach Satz 10.8 ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ maximal. \square

SATZ 10.10. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei A eine endlich erzeugte K -Algebra. Dann ist jeder Restklassenkörper von A isomorph zu K . Anders formuliert: Jedes maximale Ideal in A ist ein Punktideal.*

Beweis. Sei \mathfrak{m} ein maximales Ideal der endlich erzeugten K -Algebra A und betrachte

$$K \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{m} =: L.$$

Hier ist L ein Körper und zugleich eine endlich erzeugte K -Algebra. Nach Satz 10.7 muss also L eine endliche K -Algebra sein. Da K algebraisch abgeschlossen ist, muss $K = L$ sein. \square