Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 9

Übungsaufgaben

Aufgabe 9.1. Begründe, warum der Ring

$$\mathbb{Z}[X,Y,Z,W]/(XY - ZW, 5X^8 - YZ^3 + 2WXY)$$

noethersch ist.

Aufgabe 9.2. Sei R ein kommutativer Ring und sei

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \ldots$$

eine aufsteigende Kette von Idealen. Zeige, dass die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}_n$ ebenfalls ein Ideal ist. Zeige ebenso durch ein einfaches Beispiel, dass die Vereinigung von Idealen im Allgemeinen kein Ideal sein muss.

Aufgabe 9.3. Zeige, dass das Produkt $R \times S$ zu noetherschen Ringen R und S wieder noethersch ist.

Aufgabe 9.4. Es sei K ein Körper. Zeige, dass es in $K[X,Y]$ keine obere Schranke für die Anzahl der Erzeuger von Idealen (in einem minimalen Erzeugendensystem) gibt.

Tipp: Betrachte die Potenzen $(X,Y)^m$.

Aufgabe 9.5. Sei K ein Körper und sei

$$K[X_n,\, n \in \mathbb{N}]$$

der Polynomring über K in unendlich vielen Variablen. Man beschreibe darin ein nicht endlich erzeugtes Ideal und eine unendliche, echt aufsteigende Idealkette.

Aufgabe 9.6. Zeige, dass ein Unterring $R \subseteq S$ eines noetherschen Ringes nicht noethersch sein muss.

Aufgabe 9.7. Man gebe ein Beispiel eines nicht-noetherschen Ringes, dessen Reduktion ein Körper ist.

Aufgabe 9.8. Es sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{b} \subseteq R[X]$ ein Ideal, das zumindest ein normiertes Polynom enthalte. Was bedeutet dies für die im Beweis zum Hilbertschen Basissatz konstruierte Idealkette in R.

Aufgabe 9.9. Es sei R ein kommutativer Ring. Charakterisiere diejenigen Ideale $\mathfrak{b} \subseteq R[X]$ mit der Eigenschaft, dass die im Beweis zum Hilbertschen Basissatz konstruierte Idealkette in R konstant ist.

Aufgabe 9.10. Es sei K ein Körper und sei $R = K[X]$ der Polynomring über K. Bestimme zu den Idealen

$$\mathfrak{b} = (X,Y)^m \subseteq R[Y] = K[X,Y]$$

die im Beweis zum Hilbertschen Basissatz konstruierte Idealkette in R. Wann wird sie stationär?

Aufgabe 9.11. Bestimme zum Ideal

$$I = (6, 6x^2 + 2x + 3, 3x^3 + 5, 2x^5 + x - 4, 4x^7 - 3x)$$

in $\mathbb{Z}[x]$ die im Beweis zum Hilbertschen Basissatz konstruierte Idealkette und das zugehörige Erzeugendensystem von I. Schreibe die obigen Erzeuger als Linearkombination des konstruierten Erzeugendensystems.

Aufgabe 9.12. Wir betrachten auf- und absteigende Ketten von affin-algebraischen Mengen in $\mathbb{A}_K^n$ und von Idealen in $K[X_1, \ldots, X_n]$. Zeige die folgenden Aussagen.

a) Für einen endlichen Körper wird jede aufsteigende Kette

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots$$

von affin-algebraischen Mengen stationär.

b) Für einen unendlichen Körper und $n \geq 1$ wird nicht jede aufsteigende Kette

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots$$

von affin-algebraischen Mengen stationär.

c) Für (einen beliebigen Körper und) $n \geq 1$ wird nicht jede absteigende Idealkette

$$\mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \ldots$$

stationär.

d) Für einen unendlichen Körper und $n \geq 1$ gibt es echt absteigende Ketten von affin-algebraischen Mengen beliebiger Länge.

Aufgabe 9.13. Zeige, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der metrischen Topologie kein noetherscher topologischer Raum ist.

Aufgabe 9.14. Sei G eine kommutative Gruppe. Zeige, dass G auf genau eine Weise die Struktur eines $\mathbb{Z}$-Moduls trägt. Kommutative Gruppen und $\mathbb{Z}$-Moduln sind also äquivalente Objekte.

Aufgabe 9.15. Seien R und A kommutative Ringe. Zeige, dass A genau dann eine R-Algebra ist, wenn A ein R-Modul ist, für den zusätzlich

$$r(ab) = (ra)b \text{ für alle } r \in R,\ a, b \in A$$

gilt.

Aufgabe 9.16.*

Es sei V ein Modul über dem kommutativen Ring R. Es seien $s_1, \ldots, s_k \in R$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeige

$$\left(\sum_{i=1}^{k} s_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \right) = \sum_{1 \leq i \leq k,\, 1 \leq j \leq n} s_i \cdot v_j .$$

Aufgabe 9.17. Sei R ein kommutativer Ring, M und N zwei R-Moduln und sei

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

ein Modulhomomorphismus. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Für einen R-Untermodul $S \subseteq M$ ist auch das Bild $\varphi(S)$ ein Untermodul von N.
(2) Insbesondere ist das Bild $\operatorname{bild} \varphi = \varphi(M)$ der Abbildung ein Untermodul von N.
(3) Für einen Untermodul $T \subseteq N$ ist das Urbild $\varphi^{-1}(T)$ ein Untermodul von M.
(4) Insbesondere ist der Kern $\varphi^{-1}(0)$ ein Untermodul von M.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.18. (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit dem Restklassenring $S = R/\mathfrak{a}$. Zeige, dass die Ideale von S eindeutig denjenigen Idealen von R entsprechen, die $\mathfrak{a}$ umfassen.

Zeige, dass das Gleiche für Primideale, Radikalideale und maximale Ideale gilt.

Aufgabe 9.19. (4 Punkte)

Sei R ein noetherscher Integritätsbereich. Zeige, dass sich jedes Element aus R als ein Produkt von irreduziblen Elementen schreiben lässt.

Aufgabe 9.20. (4 Punkte)

Zeige, dass $\mathbb{Q}$ keine Algebra von endlichem Typ über $\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 9.21. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $A = K[X,Y]$. Finde eine K-Unteralgebra von A, die nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 9.22. (4 Punkte)

Bestimme zum Ideal

$$I = (10, 6x^2 + 8, 4x^3 - 12)$$

in $\mathbb{Z}[x]$ die im Beweis zum Hilbertschen Basissatz konstruierte Idealkette und das zugehörige Erzeugendensystem von I. Schreibe die obigen Erzeuger als Linearkombination mit dem konstruierten Erzeugendensystem.