Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 8

Übungsaufgaben

Aufgabe 8.1. Bestimme die möglichen Durchschnitte von zwei zueinander senkrechten Zylindern.

Aufgabe 8.2. Erstelle eine möglichst einfache Gleichung für das mechanische System, das durch die X-Achse, die (verschobene) Parabel $Y = X^2+1$ und den Abstand 2 gegeben ist.

Aufgabe 8.3. Es seien $H_1, H_2 \in K[X]$ Polynome in einer Variabeln und $C_1 = V(Y - H_1)$ und $C_2 = V(Y - H_2)$ die zugehörigen Graphen im $\mathbb{A}^2_K$. Zeige, dass man das zugehörige mechanische System mit zwei Variablen beschreiben kann.

Aufgabe 8.4. Bestimme Gleichungen für das mechanische System, das durch den Einheitskreis, die x-Achse und den Abstand 1 gegeben ist. Was sind die irreduziblen Komponenten des Systems?

Aufgabe 8.5. Es sei $M \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ ein durch die beiden Bahnen B_1 und B_2 und den Abstand d gegebenes mechanisches System. Zeige, dass es eine natürliche injektive Abbildung

$$M \longrightarrow B_1 \times B_2$$

gibt.

Aufgabe 8.6. Es sei

$$B = V(G) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$$

eine Bahn, die wir als mechanisches System M in dem Sinne auffassen, dass die beiden Punkte mit dem Abstand d auf dieser einen Bahn liegen müssen. Zeige, dass es eine natürliche fixpunktfreie bijektive Abbildung

$$M \longrightarrow M$$

gibt.

Aufgabe 8.7. Bestimme Gleichungen für das mechanische System, das durch die x-Achse (als gemeinsame Bahn) und den Abstand 1 gegeben ist.

Aufgabe 8.8. Bestimme Gleichungen für das mechanische System, das durch den Einheitskreis (als gemeinsame Bahn) und den Abstand 2 gegeben ist.

Aufgabe 8.9.*

Wir betrachten das mechanische System, das durch den Einheitskreis und die dazu tangentiale Gerade durch $(0,1)$ mit dem Koppelungsabstand $d=2$ definiert ist. Zeige, dass man dieses System mit zwei Variablen beschreiben kann.

Aufgabe 8.10. Bestimme Gleichungen für das mechanische System, das durch die x-Achse, die y-Achse und den Abstand 1 gegeben ist.

Aufgabe 8.11. Bestimme Gleichungen für das mechanische System, das durch das Achsenkreuz (als gemeinsame Bahn) und den Abstand 1 gegeben ist.

Aufgabe 8.12. Es seien

$$B_1 = V(F_1), B_2 = V(F_2) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$$

zwei Bahnen, und es sei ein Abstand d fixiert. Vergleiche das mechanische System M zu diesen Bahnen mit dem System N, das zu der einen Bahn $B_1 \cup B_2$ gehört. Zeige, dass es zwei natürliche injektive Abbildungen

$$M \longrightarrow N$$

gibt. Es sei L_i das mechanische System das zu B_i als alleiniger Bahn gehört. Zeige, dass es eine natürliche surjektive Abbildung der Form

$$L_1 \uplus L_2 \uplus M \uplus M \longrightarrow N$$

gibt.

Aufgabe 8.13. Es sei $M \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ ein mechanisches System. Zeige, dass durch

$$M \longrightarrow S^1(d),\ (P_1, P_2) \longmapsto P_1 - P_2,$$

eine Abbildung des Systems auf den Kreis mit Radius d gegeben ist. Was bedeutet die Surjektivität dieser Abbildung? Kann diese Abbildung nur endlich viele Bildpunkte besitzen?

Aufgabe 8.14. Wir betrachten das mechanische System $M \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ zu zwei sich kreuzenden Geraden. Zeige, dass die Abbildung aus Aufgabe 8.13 bijektiv ist.

Aufgabe 8.15. Wir betrachten das mechanische System $M \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ zum Einheitskreis, zum Kreis mit Mittelpunkt $(0,2)$ und Radius 4 und zum Koppelungsabstand 5. Zeige, dass die Abbildung aus Aufgabe 8.13 nicht surjektiv ist. Was ist das Bild?

In den folgenden Aufgaben betrachten wir die Nullstellenmenge

$$V = V(f_1, \ldots, f_k) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$$

differentialgeometrisch. Wir erinnern an die folgende Definition von einem regulären Punkt zu einer differenzierbaren Abbildung aus der Analysis 2 Vorlesung. Dieser Begriff ist im jetzigen Kontext auf die Abbildung

$$\varphi = (f_1, \ldots, f_k) \colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{A}^k_{\mathbb{R}}$$

in einem Punkt $P \in V$ anzuwenden.

Seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen, sei $P \in G$ und sei

$$\varphi \colon G \longrightarrow W$$

eine in P differenzierbare Abbildung. Dann heißt P ein *regulärer Punkt* von φ, wenn

$$\operatorname{rang} (D\varphi)_P = \min (\dim (V), \dim (W))$$

ist. Andernfalls heißt P ein *kritischer Punkt* oder ein *singulärer Punkt*.

Aufgabe 8.16.*

Wir betrachten das mechanische System, das durch die x-Achse und den Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 2)$ gegeben ist. Der Koppelungsabstand sei $d > 0$.

(1) Erstelle die Gleichungen, die dieses System beschreiben.
(2) Bestimme, für welche d das System in jedem Punkt regulär ist.
(3) Bestimme die kritischen Punkte in Abhängigkeit von d. Wie kann man diese Punkte als Eigenschaft des mechanischen Systems erklären?

Aufgabe 8.17. Wir betrachten das mechanische System, das durch die x-Achse und den Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 2)$ gegeben ist. Der Koppelungsabstand sei $d > 0$.

(1) Begründe anschaulich und zeige, dass dieses mechanische System zu $d > 3$ nicht (in der reellen Topologie) wegzusammenhängend ist.
(2) Begründe anschaulich und zeige, dass dieses mechanische System zu $1 \leq d \leq 3$ wegzusammenhängend ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.18. (6 (2+2+2) Punkte)

Wir betrachten das mechanische System, das durch die x-Achse, die Parabel $V(Y - X^2)$ und den Koppelungsabstand 1 gegeben ist.

(1) Bestimme Gleichungen (in möglichst wenigen Variablen) für das mechanische System.

(2) Besitzt das System kritische Punkte?
(3) Bestimme die Gleichung für den Bewegungsvorgang zum Mittelpunkt der Verbindungsstange.

Aufgabe 8.19. (2 Punkte)

Bestimme Gleichungen für das mechanische System, das durch den Einheitskreis (als gemeinsame Bahn) und den Abstand 1 gegeben ist.

Aufgabe 8.20. (6 (2+2+2) Punkte)

Wir betrachten das mechanische System, das durch die Parabel $V(Y - X^2)$, den Kreis mit Mittelpunkt $(0, 2)$ und Radius 1 und den Koppelungsabstand 1 gegeben ist.

(1) Bestimme Gleichungen (in möglichst wenigen Variablen) für dieses mechanische System.
(2) Bestimme die Zusammenhangskomponenten des Systems in der metrischen Topologie.
(3) Bestimme die Zusammenhangskomponenten des Systems in der Zariski-Topologie.

Aufgabe 8.21. (6 (2+4) Punkte)

Wir betrachten das mechanische System, das durch die x-Achse und den Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 2)$ gegeben ist. Der Koppelungsabstand sei $d > 0$. Wir knüpfen an Aufgabe 8.16 an.

(1) Eliminiere die Variable y_1 aus den Gleichungen des Systems.
(2) Bestimme mit der einen beschreibenden Gleichung des Systems in den Variablen x_1 und x_2, für welche d das System in jedem Punkt regulär ist.

Aufgabe 8.22. (6 Punkte)

Es sei $C \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ der Schnitt von zwei Zylindern mit Radius 1 (C ist also die Vereinigung von zwei Ellipsen). Wir betrachten die durch einen Vektor $v = (a, b, c) \neq 0$ definierte senkrechte Projektion

$$p_v \colon \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}.$$

Man charakterisiere, in Abhängigkeit von a, b, c, die möglichen Bilder unter diesen Projektionen.

Aufgabe 8.23. (4 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathbb{A}^2_K,\ (x, y) \longmapsto (x^2, y^2) = (u, v).$$

Wie sieht das Bild der Ebene und wie das Bild des Einheitskreises unter dieser Abbildung für $K = \mathbb{R}$ und wie für $K = \mathbb{C}$ aus? Im reellen Fall, wenn der Kreis einmal durchlaufen wird, wie oft wird das Bild durchlaufen?