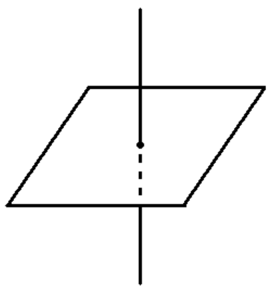
Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2017/2018

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 4

Übungsaufgaben

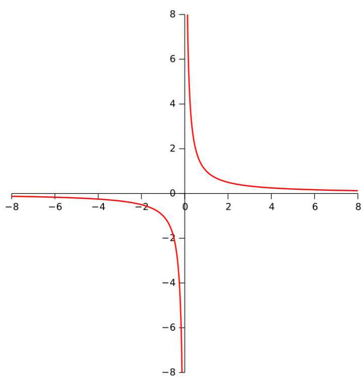
Aufgabe 4.1. Finde ein Ideal, dessen Nullstellenmenge das folgende Gebilde ist.



Aufgabe 4.2. Sei $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine Teilmenge, die aus endlich vielen Punkten bestehe. Zeige: V ist genau dann irreduzibel, wenn V einpunktig ist.

Aufgabe 4.3. Skizziere ein Beispiel einer zusammenhängenden, aber nicht irreduziblen affin-algebraischen Teilmenge.

Aufgabe 4.4. Bestimme die irreduziblen Komponenten der reellen Hyperbel.



Aufgabe 4.5. Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und $a \in K$ von 0 verschieden. Zeige, dass das Polynom

$$X^2 + Y^2 + a \in K[X, Y]$$

irreduzibel ist.

Aufgabe 4.6. Es sei K ein Körper und $\mathfrak{p} = (p) \subset K[X]$ ein Primideal. Zeige, dass die Verschwindungsmenge $V(\mathfrak{p}) \subseteq \mathbb{A}_K^1$ leer (und damit nicht irreduzibel) oder aber einpunktig (und damit irreduzibel) ist.

Aufgabe 4.7. Es sei K ein endlicher Körper und $\mathfrak{p} \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Primideal. Zeige, dass die Verschwindungsmenge $V(\mathfrak{p}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ nur dann irreduzibel ist, wenn sie einpunktig ist.

Aufgabe 4.8. Zeige, dass das reelle Polynom

$$P = X^2(X-1)^2 + Y^2\left(X^2 + (X-1)^2\right) \in \mathbb{R}[X, Y]$$

ein Primpolynom ist, und dass die Nullstellenmenge

$$V(P) \subseteq \mathbb{R}^2$$

nicht leer, aber reduzibel ist.

Aufgabe 4.9. Berechne in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ den Schnitt des Zylinders $V(x^2 + y^2 - 1)$ mit der Kugel mit Mittelpunkt $P = (0, 0, 0)$ und Radius r in Abhängigkeit von r. Wann ist der Durchschnitt leer, wann irreduzibel?

Man darf verwenden, dass der reelle Kreis irreduzibel ist.

Aufgabe 4.10. Betrachte die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der metrischen Topologie. Ist $\mathbb{R}$ irreduzibel?

Aufgabe 4.11. Sei p eine Primzahl und $\mathbb{Z}/(p)$ der zugehörige Restklassenkörper. Zeige: Jede Quadrik der Form

$$F = aX^2 + bY^2 + c = 0$$

mit $a, b \neq 0$ hat mindestens eine Lösung in $\mathbb{Z}/(p)$.

Aufgabe 4.12. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem kommutativen Ring R. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ genau dann ein Primideal ist, wenn $\mathfrak{a}$ der Kern eines Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to K$ in einen Körper K ist.

Aufgabe 4.13. Zeige, dass ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ in einem kommutativen Ring R ein Primideal ist.

Aufgabe 4.14.*

Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{p}$ ein Ideal. Zeige, dass $\mathfrak{p}$ genau dann ein Primideal ist, wenn der Restklassenring $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 4.15. Seien R und S kommutative Ringe und sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in S. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal in R ist.

Zeige durch ein Beispiel, dass das Urbild eines maximalen Ideales kein maximales Ideal sein muss.

Aufgabe 4.16. Es sei K ein Körper und $L = K(X)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $K[X]$. Zeige, dass es unendlich viele Zwischenkörper zwischen K und L gibt.

Aufgabe 4.17. Erkläre, wo der Beweis zu Satz 4.8 zusammenbricht, wenn man ihn auf mehr als zwei Variablen ausdehnen will.

Aufgabe 4.18. Es seien $P(X)$ und $Q(Y)$ nichtkonstante Polynome in der einen angegebenen Variablen. Man gebe eine Abschätzung (unter welcher Bedingung?) für die Anzahl der Schnittpunkte der beiden Kurven $V(Y - P(X))$ und $V(X - Q(Y))$.

In den folgenden Aufgabe werden die Begriffe *abgeschlossene Abbildung* und *offene Abbildung* verwendet.

Eine stetige Abbildung

$$f\colon X \longrightarrow Y$$

zwischen topologischen Räumen X und Y heißt *abgeschlossen*, wenn Bilder von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen sind.

Sie heißt *offen*, wenn Bilder von offenen Mengen wieder offen sind.

Aufgabe 4.19. Zeige, dass die Projektion

$$\mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathbb{A}^1,\ (x,y) \longmapsto x,$$

nicht abgeschlossen in der Zariski-Topologie ist.

Aufgabe 4.20. Zeige, dass eine ebene algebraische Kurve über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ nicht kompakt in der metrischen Topologie ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 4.21. (6 Punkte)

Sei p eine Primzahl ≥ 3 und $\mathbb{Z}/(p)$ der zugehörige Restklassenkörper. Es sei ein Polynom $F \in \mathbb{Z}/(p)[X,Y]$ der Form

$$F = \alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2 + \delta X + \epsilon Y + \eta$$

gegeben. Zeige, dass für das zugehörige Nullstellengebilde $V(F) \subseteq \mathbb{A}_K^2$ (wenn α, β, γ nicht alle 0 sind, so ist das eine Quadrik) die folgenden drei Alternativen bestehen.

(1) $V(F)$ besitzt mindestens einen Punkt.
(2) $F = c$ mit einer Konstanten $c \neq 0$.
(3) Es gibt eine Variablentransformation derart, dass das Polynom in den neuen Koordinaten die Gestalt $Z^2 - u$ mit einem Nichtquadrat $u \in \mathbb{Z}/(p)$ besitzt.

Aufgabe 4.22. (3 Punkte)

Sei V eine irreduzible, affin-algebraische Menge mit mindestens zwei Punkten und seien $P_1, \ldots, P_m \in V$ endlich viele Punkte darin. Zeige, dass dann auch $V \setminus \{P_1, \ldots, P_m\}$ (in der induzierten Topologie) irreduzibel ist.

Aufgabe 4.23. (4 Punkte)

Sei R ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper $Q(R)$. Zeige: Wenn $F, G \in R[X]$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen, so besitzen sie aufgefasst in $Q(R)[X]$ ebenfalls keinen gemeinsamen Teiler.

(Man darf sich auf Hauptidealbereiche R beschränken.)

Aufgabe 4.24. (3 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen. Begründe, ob

$$V(X^2 + Y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^2$$

irreduzibel ist oder nicht.

Tipp: Man verwende Aufgabe 1.25 und Korollar 4.9.

Aufgabe 4.25. (4 Punkte)

Zeige, dass die Projektion

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^1,\ (x,y) \longmapsto x,$$

offen in der Zariski-Topologie ist.

Aufgabe 4.26. (4 Punkte)

Zeige, dass die affine Ebene $\mathbb{A}_K^2$ mit der Zariski-Topologie kompakt ist.

Abbildungsverzeichnis