Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 30

Übungsaufgaben

Aufgabe 30.1. Zeige durch ein Beispiel, dass Lemma 30.2 nicht ohne die Voraussetzung gilt, dass der Körper algebraisch abgeschlossen ist.

Aufgabe 30.2.*

Bestimme die Schnittpunkte der Fermat-Kubik

$$V_+\left(X^3+Y^3+Z^3\right) \subseteq \mathbb{P}^2_K$$

mit der Geraden $V_+(X+Y+Z)$.

Aufgabe 30.3. Bestätige den Satz von Bezout für die beiden (affin gegebenen) Kreise

$$V\left(X^2+Y^2-1\right) \text{ und } V\left(X^2+Y^2-4\right) .$$

Aufgabe 30.4. Bestätige den Satz von Bezout für die beiden (affin gegebenen) Kurven

$$V\left(Y-X^2\right) \text{ und } V\left(X-Y^2\right) .$$

Aufgabe 30.5. Bestätige den Satz von Bezout für die beiden (affin gegebenen) Kurven

$$V\left(Y-X^2\right) \text{ und } V\left(Y-X^2-1\right) .$$

Aufgabe 30.6. Bestätige den Satz von Bezout für die beiden (affin gegebenen) Kurven

$$V\left(Y-X^2\right) \text{ und } V\left(Y-3X^2\right) .$$

Aufgabe 30.7. Bestätige den Satz von Bezout für die beiden ebenen projektiven Kurven, die jeweils als projektiver Abschluss zum Graphen der rationalen Funktion $Y = X^{-1}$ bzw. $Y = X^{-1}+1$ gegeben sind.

Aufgabe 30.8.*

Sei $K = \mathbb{C}$. Bestimme für die beiden affinen Kurven

$$V\left(Y - X^3\right) \text{ und } V\left(Y^2 - X^3\right)$$

ihre Schnittpunkte zusammen mit den Schnittmultiplizitäten. Betrachte auch Schnittpunkte im $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ und bestätige den Satz von Bezout in diesem Beispiel.

Aufgabe 30.9.*

Sei $K = \mathbb{C}$ und betrachte die beiden ebenen algebraischen Kurven

$$C = V\left(X - Y^2\right) \text{ und } D = V\left(Y^2 - X^5\right) .$$

Bestimme die Schnittpunkte der beiden Kurven in der affinen Ebene und bestimme jeweils die Schnittmultiplizität. Bestimme auch die unendlich fernen Punkte der beiden Kurven (also die zusätzlichen Punkte auf den projektiven Abschlüssen $\bar{C}$ und $\bar{D}$) und überprüfe damit die Schnittpunkte im Unendlichen. Bestätige abschließend, dass der Satz von Bezout in diesem Beispiel erfüllt ist.

Aufgabe 30.10. Zeige, dass in den in Beispiel 30.6 berechneten Schnittpunkten $\neq (0, 0)$ der beiden Kurven ein transversaler Schnitt vorliegt.

Aufgabe 30.11.*

Sei $K = \mathbb{Z}/(5)$ und betrachte die beiden affinen ebenen algebraischen Kurven

$$C = V\left(X^2 + Y^2 - 1\right) \text{ und } D = V\left(X^3 - 2Y^2 + 3\right) .$$

Bestimme den Durchschnitt $C \cap D$. Bestimme ferner die unendlich fernen Punkte der beiden Kurven (also die zusätzlichen Punkte auf dem projektiven Abschluss $\bar{C}$ bzw. $\bar{D}$). Wenn man K durch einen algebraisch abgeschlossenen Körper $K \subset L$ ersetzt, wie viele Punkte besitzt dann der Durchschnitt $\bar{C} \cap \bar{D}$ und wie viele davon liegen auf der unendlich fernen Geraden?

Aufgabe 30.12.*

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0. Wir betrachten die beiden Kurven $C = V\left(Y^2 - X^b\right)$ und $D = V\left(Y^2 - X^c\right)$ mit $c > b \geq 3$, b, c ungerade.

a) Berechne die Schnittmultiplizität der beiden Kurven im Nullpunkt $(0, 0)$.

b) Berechne die Schnittmultiplizität der beiden Kurven in $(1, 1)$.

c) Bestimme die unendlich fernen Schnittpunkte der beiden Kurven.

Aufgabe 30.13.*

Bestimme die Schnittmultiplizitäten über $\mathbb{C}$ mit Hilfe des Satzes von Bezout für die beiden ebenen projektiven Kurven, die affin durch $C = V(Y^2 - X^3)$ und den Kreis mit Mittelpunkt $(-1, 0)$ und Radius 1 gegeben sind.

Aufgabe 30.14. Es seien $F, G \in K[X]$ verschiedene Polynome vom Grad $d \geq e$ und seien

$$C = V_+\left(YZ^{d-1} - \hat{F}(X,Z)\right)$$

und

$$D = V_+\left(YZ^{e-1} - \hat{G}(X,Z)\right)$$

die projektiven Abschlüsse der zugehörigen Graphen wie in Beispiel 30.7. Diskutiere den Fall $d = e$.

Aufgabe 30.15. Es seien $F, G \in K[X]$ verschiedene Polynome vom Grad $d \geq e$ und seien

$$C = V_+\left(YZ^{d-1} - \hat{F}(X,Z)\right)$$

und

$$D = V_+\left(YZ^{e-1} - \hat{G}(X,Z)\right)$$

die projektiven Abschlüsse der zugehörigen Graphen wie in Beispiel 30.7. Diskutiere den Fall $e = 1$.

Aufgabe 30.16.*

Zeige, dass der Produktraum $\mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K$ und die projektive Ebene $\mathbb{P}^2_K$ nicht zueinander isomorph sind.

Aufgabe 30.17.

(1) Zeige, dass durch

$$\varphi\colon \mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K \longrightarrow \mathbb{P}^3_K,\ ((s,t),(u,v)) \longmapsto (su, sv, tu, tv) = (x, y, z, w),$$

ein Morphismus gegeben ist.

(2) Zeige, dass das Bild von φ die homogene Gleichung

$$xw = yz$$

erfüllt.

(3) Zeige, dass eine bijektive Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K \longrightarrow V_+(xw - yz)$$

vorliegt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 30.18. (3 Punkte)

Bestätige den Satz von Bezout für die beiden (affin gegebenen) Kurven

$$V\left(Y - X^2\right) \text{ und } V\left(Y - (X-1)^2\right) .$$

Aufgabe 30.19. (4 Punkte)

Bestätige den Satz von Bezout für die beiden ebenen projektiven Kurven $C = V_+\left(ZY^2 - X^3\right)$ und $D = V_+\left(X^2 + (Y-Z)^2 - Z^2\right)$.

Aufgabe 30.20. (4 Punkte)

Bestätige den Satz von Bezout für die beiden ebenen projektiven Kurven $C = V_+\left(ZY - X^2\right)$ und $D = V_+\left(X^2 + (Y-Z)^2 - Z^2\right)$.

Aufgabe 30.21. (4 Punkte)

Bestätige den Satz von Bezout für die beiden monomialen Kurven, die affin durch $C = V(X^2 - Y^3)$ und $D = V(X^5 - Y^4)$ gegeben sind.