Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 28

Übungsaufgaben

Aufgabe 28.1. Es sei X ein kompakter Raum und es sei $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge, die die induzierte Topologie trage. Zeige, dass Y ebenfalls kompakt ist.

Aufgabe 28.2. Zeige, dass eine projektive Varietät über $\mathbb{C}$ in der natürlichen Topologie kompakt ist.

Aufgabe 28.3. Es sei Y eine projektive Varietät über $\mathbb{C}$, die zugleich eine affine Varietät sei. Zeige, dass Y eine endliche Punktmenge ist.

Aufgabe 28.4. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass eine ebene projektive Kurve mit jeder projektiven Geraden in der projektiven Ebene einen nichtleeren Durchschnitt hat.

Aufgabe 28.5.*

Zeige, dass die ebene projektive Kurve

$$V_+\left(X^4 + Y^3Z + Z^4\right) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

glatt ist.

Aufgabe 28.6.*

Bestimme, ob die ebene projektive Kurve

$$V_+\left(X^4 + YZ^3 + Z^4\right) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

glatt ist.

Aufgabe 28.7.*

Zeige, dass eine ebene projektive Kurve

$$V_+(F) \subset \mathbb{P}^2_K$$

genau dann glatt ist, wenn die partiellen Ableitungen

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)$$

in keinem Punkt der Kurve simultan gleich 0 sind.

Aufgabe 28.8. Sei K ein Körper. Bestimme den globalen Schnittring

$$\Gamma(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}).$$

Was folgt daraus für einen Morphismus $\mathbb{P}^1_K \to \mathbb{A}^1_K$?

Aufgabe 28.9.*

Sei K ein Körper. Zeige, dass sämtliche lokale Ringe der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_K$ isomorph zueinander sind. Man gebe eine möglichst einfache Beschreibung dieses Ringes.

Aufgabe 28.10. Man definiere und charakterisiere, wann eine irreduzible quasiprojektive Varietät *normal* ist.

Aufgabe 28.11. Definiere zu jedem $n \in \mathbb{Z}$ das Potenzieren $x \mapsto x^n$ als Morphismus der projektiven Gerade auf sich selbst. Wie sehen die Fasern unter diesem Morphismus aus?

Aufgabe 28.12. Es sei $f \in K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad d und sei

$$D_+(f) \subseteq \mathbb{P}^n_K$$

die zugehörige offene Teilmenge des projektiven Raumes. Zeige, dass zu jedem homogenen Polynom $h \in K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ vom Grad e die rationale Funktion $\frac{h}{f^n}$ unter der Bedingung $e = nd$ eine algebraische Funktion $\frac{h}{f^n} \colon D_+(f) \to K$ definiert.

Aufgabe 28.13. Zeige durch ein Beispiel, dass die Kegelabbildung $\mathbb{A}^{n+1}_K \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n_K$ nicht abgeschlossen sein muss.

Aufgabe 28.14. Zeige, dass die Kegelabbildung $\mathbb{A}^{n+1}_K \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n_K$ ein Morphismus von quasiprojektiven Varietäten ist.

Aufgabe 28.15. Seien X und Y quasiprojektive Varietäten und sei $\varphi \colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Es sei $Y = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Zeige, dass φ genau dann ein Morphismus ist, wenn die Einschränkungen $\varphi_i : \varphi^{-1}(U_i) \to U_i$ für jedes i Morphismen sind

Aufgabe 28.16. Es seien $P, Q \in \mathbb{P}^n_K$ Punkte im projektiven Raum über einem Körper K. Zeige, dass es einen Automorphismus $\varphi \colon \mathbb{P}^n_K \to \mathbb{P}^n_K$ mit $\varphi(P) = Q$ gibt.

Aufgabe 28.17. Es sei K ein Körper und $\mathbb{P}^n_K$ der zugehörige projektive Raum. Es sei $\varphi \colon K^{n+1} \to K^{n+1}$ eine bijektive lineare Abbildung.

(1) Zeige, dass φ einen Automorphismus
$$\varphi \colon \mathbb{P}^n_K \longrightarrow \mathbb{P}^n_K,\, (x_0, x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$
induziert.
(2) Bestimme das Urbild von $D_+(X_i)$ in der in (1) beschriebenen Situation. Wie sieht der Morphismus für diese affinen Mengen aus?
(3) Zeige, dass φ_1 und φ_2 genau dann den gleichen Automorphismus auf dem projektiven Raum induzieren, wenn sie durch Multiplikation mit einem Skalar $\neq 0$ ineinander überführbar sind.
(4) Induziert jede lineare Abbildung $\varphi \colon K^{n+1} \to K^{n+1}$ einen Morphismus $\varphi \colon \mathbb{P}^n_K \to \mathbb{P}^n_K$?

Unter einem solchen Automorphismus wird jede projektive Varietät $V \subset \mathbb{P}_K^n$ isomorph auf sein Bild abgebildet, die homogenen Gleichungen transformieren sich entsprechend der affinen Situation. Dadurch kann man häufig die beschreibenden Gleichungen einer Situation vereinfachen, man spicht von einem *projektiv-linearen Koordinatenwechsel*. Die vorstehende Aufgabe gibt Anlass zur folgenden Definition.

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Die Restklassengruppe

$$\operatorname{SL}_n(K) \,/\, \left(K^\times \cdot \operatorname{Id} \cap \operatorname{SL}_n(K)\right)$$

heißt *projektive spezielle lineare Gruppe*. Sie wird mit

$$\operatorname{PSL}_n(K)$$

bezeichnet.

Aufgabe 28.18.*

Bestimme die Fixpunkte der Abbildung

$$\mathbb{P}_K^1 \longrightarrow \mathbb{P}_K^1,\ (s,t) \longmapsto (t,s).$$

Aufgabe 28.19. Bestimme den projektiven Abschluss der Hyperbel

$$V(XY-1) \subseteq \mathbb{A}_K^2 \subseteq \mathbb{P}_K^2.$$

Aufgabe 28.20. Bestimme den projektiven Abschluss der Parabel

$$V\left(Y-X^2\right) \subseteq \mathbb{A}_K^2 \subseteq \mathbb{P}_K^2.$$

Aufgabe 28.21. Es sei $C \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ eine glatte Quadrik. Zeige, dass auch der projektive Abschluss

$$\tilde{C} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$$

glatt ist.

Aufgabe 28.22. Es sei $F \in K[X]$ ein Polynom in einer Variablen über einem Körper K und sei $V(Y-F) \subseteq \mathbb{A}^2$ der zugehörige Graph, aufgefasst als ebene affine Kurve. Bestimme den projektiven Abschluss $\tilde{C} \subseteq \mathbb{P}_K^2$ des Graphen.

Aufgabe 28.23. Es seien $F, G \in K[X]$, $G \neq 0$, Polynome in einer Variablen über einem Körper K und sei F/G die zugehörige rationale Funktion. Es sei $V \subseteq \mathbb{A}^2$ der Graph zu dieser rationalen Funktion, aufgefasst als ebene affine Kurve. Bestimme den projektiven Abschluss $\tilde{C} \subseteq \mathbb{P}_K^2$ des Graphen. Wo finden sich „Asymptoten“ im projektiven Abschluss wieder?

Aufgabe 28.24. Es sei $C \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ eine ebene affine Kurve. Zeige, dass der projektive Abschluss

$$\tilde{C} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$$

zusätzliche Punkte enthält.

Aufgabe 28.25.*

Ist die ebene projektive Kurve $V_+\left(X^4+Z^3Y+Z^4\right) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ isomorph zum projektiven Abschluss einer monomialen Kurve?

Aufgabe 28.26. Es sei $(H) \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Hauptideal. Zeige, dass die Homogenisierung des Ideals (H) gleich dem von der Homogenisierung von H erzeugten Hauptideal ist.

Aufgabe 28.27. Bestimme den projektiven Abschluss der durch

$$V\left(\left(X^2+Y^2\right)^2 - 2X\left(X^2+Y^2\right) - Y^2\right)$$

gegebenen *Kardioide* über den komplexen Zahlen und insbesondere die „Punkte im Unendlichen“.

Aufgabe 28.28.*

Betrachte die affine Nullstellenmenge

$$V := V\left(X^4+Y^2\right) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$$

über $\mathbb{R}$.

(1) Bestimme die Punkte von V und den projektiven Abschluss von V.
(2) Zeige, dass der projektive Abschluss von V nicht mit der projektiven Nullstellenmenge zur Homogenisierung von X^4+Y^2 übereinstimmt.

Aufgabe 28.29.*

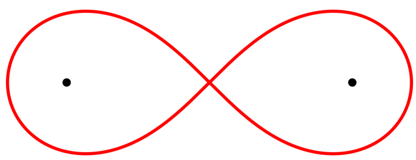
Betrachte die affine Nullstellenmenge

$$V := V\left(X^2+Y^2+1\right) \subseteq \mathbb{A}^2_K$$

über dem Körper $K = \mathbb{Z}/(2)$ mit zwei Elementen.

(1) Bestimme die Punkte von V.
(2) Bestimme den projektiven Abschluss von V.
(3) Zeige, dass der projektive Abschluss von V nicht mit der projektiven Nullstellenmenge zur Homogenisierung von X^2+Y^2+1 übereinstimmt.

Aufgabe 28.30. Es sei K ein endlicher Körper und $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n_K$ eine affine Varietät. Zeige, dass der projektive Abschluss von V mit V übereinstimmt.



Die Lemniskate von Bernoulli

Aufgabe 28.31. Bestimme für die durch $V\left(\left(X^2+Y^2\right)^2 - X^2 + Y^2\right)$ gegebene Lemniskate von Bernoulli die Singularitäten sowie die unendlich fernen Punkte in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Berechne in all diesen Punkten die Multiplizität und die Tangenten.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 28.32. (3 Punkte)

Seien $m+1$ homogene Polynome $F_0, \ldots, F_m$ in $n+1$ Variablen gegeben, die alle den gleichen Grad d besitzen. Zeige, dass es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{P}^n_K$ gibt, auf der die Polynome einen Morphismus

$$\mathbb{P}^n_K \supseteq U \longrightarrow \mathbb{P}^m_K$$

definieren.

Aufgabe 28.33. (4 Punkte)

Bestimme für die Kegelabbildung $\mathbb{A}^{n+1}_K \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n_K$ den Zariski-Abschluss im $\mathbb{P}^n_K$ des Bildes einer abgeschlossenen Menge $V(\mathfrak{a}) \cap \mathbb{A}^{n+1}_K \setminus \{0\}$.

Aufgabe 28.34. (3 Punkte)

Sei X eine irreduzible quasiprojekive Varietät mit Funktionenkörper $L = K(X)$. Es seien U und U_i, $i \in I$, offene Teilmengen mit $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Zeige, dass

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) \,=\, \bigcap_{i \in I} \Gamma(U_i, \mathcal{O})$$

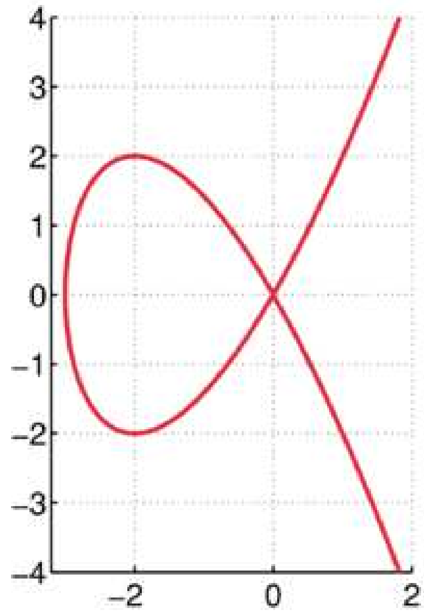
ist, wobei der Durchschnitt in L genommen wird.

Aufgabe 28.35. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und $\mathbb{P}^n_K$ der projektive Raum. Zeige, dass die Konstanten die einzigen globalen algebraischen Funktionen sind, d.h. es gilt

$$\Gamma(\mathbb{P}^n_K, \mathcal{O}) \,=\, K.$$

Bemerkung: Diese Aussage gilt für jede zusammenhängende projektive Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper.



Die Tschirnhausen Kubik

Aufgabe 28.36. (3 Punkte)

Bestimme für die durch $V(X^3+3X^2-Y^2)$ gegebene *Tschirnhausen Kubik* die Singularitäten unter Berücksichtigung der unendlich fernen Punkte. Bestimme die Tangenten in den Singularitäten und in den unendlich fernen Punkten.

Aufgabe 28.37. (3 Punkte)

Bestimme für das durch $V(X^3+Y^3-3XY)$ definierte Kartesische Blatt die unendlich fernen Punkte in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ und berechne die Multiplizität und die Tangenten in diesen Punkten.

Abbildungsverzeichnis