Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 27

Übungsaufgaben

Aufgabe 27.1. Definiere eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{A}_K^{n+1} \setminus \{0\}$ derart, dass der Quotient unter der Äquivalenzrelation der projektive n-dimensionale Raum ist.

Aufgabe 27.2. Sei $P = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{P}_K^n$ ein Punkt im projektiven Raum. Zeige, dass es eine offene affine Umgebung $U \cong \mathbb{A}_K^n \subset \mathbb{P}_K^n$ derart gibt, dass P in diesem affinen Raum dem Nullpunkt entspricht.

Aufgabe 27.3. Sei $\mathbb{P}_K^n$ der projektive Raum der Dimension n über dem Körper K und seien

$$D_+(X_i) \cong \mathbb{A}_K^n, D_+(X_j) \cong \mathbb{A}_K^n \subset \mathbb{P}_K^n$$

zwei affine offene Teilmengen. Beschreibe die (nicht überall definierte) Übergangsabbildung von $D_+(X_i)$ nach $D_+(X_j)$.

Aufgabe 27.4. Man definiere den Begriff *projektiv-linearer Unterraum* eines projektiven Raumes $\mathbb{P}_K^n$.

Aufgabe 27.5. Sei $K = \mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper. Berechne auf zwei verschiedene Arten, wie viele Elemente der projektive Raum $\mathbb{P}_K^n$ besitzt.

Aufgabe 27.6. Sei $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ genau dann ein homogenes Ideal ist, wenn es von homogenen Elementen erzeugt wird.

Aufgabe 27.7. Skizziere die projektive Nullstellenmenge

$$V_+(XYZ) \subseteq \mathbb{P}_K^2.$$

Aufgabe 27.8. Sei K ein Körper und sei $\mathbb{P}_K^2$ die projektive Ebene über K. Zeige, dass zwei projektive Geraden $L, M \subseteq \mathbb{P}_K^2$ stets einen nichtleeren Durchschnitt besitzen.

Aufgabe 27.9.*

Bestimme den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$L = V_+(6X - 8Y + 3Z)$$

und

$$M = V_+(2X + 9Y - 5Z)$$

in der projektiven Ebene.

Aufgabe 27.10. Bestimme den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$L = V_+(7X - 7Y + 6Z)$$

und

$$M = V_+(8X + Y - 4Z)$$

in der projektiven Ebene.

Die folgenden Aufgaben besprechen die Zariski-Topologie auf den projektiven Räumen.

Aufgabe 27.11. Zeige, dass die Zariski-Topologie auf dem projektiven Raum wirklich eine Topologie ist.

Aufgabe 27.12. Sei K ein unendlicher Körper und $\mathbb{P}^n_K$ der projektive Raum. Charakterisiere die homogenen Ideale $\mathfrak{a}$, für die $D_+(\mathfrak{a}) = \emptyset$ ist.

Aufgabe 27.13. Sei K ein unendlicher Körper. Zeige, dass der projektive Raum $\mathbb{P}^n_K$ irreduzibel ist.

Aufgabe 27.14. Sei $D_+(L) \cong \mathbb{A}^n_K \subset \mathbb{P}^n_K$, wobei L eine homogene Linearform im zugehörigen Polynomring $K[X_0, \ldots, X_n]$ sei. Zeige, dass die Zariski-Topologie auf dem projektiven Raum die Zariski-Topologie auf dem affinen Raum induziert.

Aufgabe 27.15.*

Zeige, dass unter der Kegelabbildung

$$\pi \colon \mathbb{A}^{n+1}_K \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$$

die Beziehung

$$\pi^{-1}(V_+(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}) \cap \left(\mathbb{A}^{n+1}_K \setminus \{0\}\right)$$

für jedes homogene Ideal $\mathfrak{a} \subseteq K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ gilt. Folgere daraus, dass π stetig in der Zariski-Topologie ist.

Aufgabe 27.16. Es sei

$$Q = V\left(X_0^2 + X_1^2 + \cdots + X_n^2 - 1\right) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n+1}$$

und betrachte die Gesamtabbildung

$$\varphi : Q \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n},$$

wobei hinten die Kegelabbildung steht. Ist φ surjektiv? Wie verhält sich φ zur Einschränkung der Kegelabbildung auf die reell $2n+1$-dimensionale Sphäre $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2} \cong \mathbb{C}^{n+1}$?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 27.17. (3 Punkte)

Bestimme den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$L = V_+(-3X - 5Y + 4Z)$$

und

$$M = V_+(7X + 2Y - 6Z)$$

in der projektiven Ebene.

Aufgabe 27.18. (3 Punkte)

Zeige, dass zwei verschiedene Punkte P und Q in der projektiven Ebene eindeutig eine projektive Gerade definieren, auf der beide Punkte liegen. Wie berechnet man die Geradengleichung aus den Koordinaten der Punkte?

Bestimme die homogene Geradengleichung für die beiden Punkte $(2, 3, 7)$ und $(1, 5, -2)$.

Aufgabe 27.19. (3 Punkte)

Es sei $\mathbb{P}_K^n$ ein projektiver Raum der Dimension n und es seien $X, Y \subseteq \mathbb{P}_K^n$ projektiv-lineare Unterräume der Dimension r und s. Es sei $r + s \geq n$. Zeige, dass dann $X \cap Y \neq \emptyset$ ist.

Aufgabe 27.20. (3 Punkte)

Sei K ein unendlicher Körper und sei $P_1, \ldots, P_m$ eine endliche Ansammlung von Punkten in einem projektiven Raum $\mathbb{P}_K^n$. Zeige: Dann gibt es eine homogene Linearform $L \in K[X_0, \ldots, X_n]$ derart, dass all diese Punkte auf der durch L definierten offenen Teilmenge $D_+(L)$ liegen.

Aufgabe 27.21. (3 Punkte)

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$. Es sei $H \subset \mathbb{K}^{n+1}$ ein n-dimensionaler affiner Unterraum, der den Nullpunkt nicht enthält, und es sei $\tilde{H}$ der dazu parallele Unterraum durch den Nullpunkt. Es sei $U \subseteq H$ eine in $H \cong \mathbb{K}^n$ offene Menge (in der metrischen Topologie) und es sei V die Vereinigung aller Geraden durch den Nullpunkt und durch einen Punkt von U. Zeige, dass der Durchschnitt von V mit $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \tilde{H}$ offen ist.

Die nächste Aufgabe benötigt noch die folgende Definition:

Für ein homogenes Ideal I in $R = A[X_0, \ldots, X_n]$ mit der Standardgraduierung definiert man die *Sättigung* (oder *Saturierung*) von I als

$$\{r \in R |\, \text{es existiert ein } n \text{ mit } r \cdot (R_+)^n \subseteq I\} \, .$$

Dabei ist R_+ das *irrelevante Ideal* $\bigoplus_{d \geq 1} R_d = (X_0, \ldots, X_n)$.

Aufgabe 27.22. (3 Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring und $R = A[X_0, \ldots, X_n]$ der Polynomring mit der Standardgraduierung. Zeige, dass die Sättigung eines homogenen Ideals I wieder ein homogenes Ideal ist.