Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 26

Übungsaufgaben

Aufgabe 26.1. Man gebe für jedes n ein Beispiel von zwei aus der Schule bekannten ebenen algebraischen Kurven, die sich in genau einem Punkt mit Schnittmultiplizität n schneiden.

Die folgende Aufgabe fügt den äquivalenten Charakterisierungen zur Nullstellenordnung in Aufgabe 21.15 eine weitere hinzu.

Aufgabe 26.2. Es sei K ein Körper der Charakteristik 0 und sei $f \in K[X]$, $f \neq 0$, und $a \in K$. Es sei $C = V(Y - f)$ der Graph zu f, aufgefasst als ebene algebraische Kurve. Zeige, dass die folgenden „Ordnungen" von f an der Stelle a übereinstimmen.

(1) Die Verschwindungsordnung von f an der Stelle a, also die maximale Ordnung einer formalen Ableitung mit $f^{(k)}(a) = 0$.
(2) Der Exponent des Linearfaktors $X - a$ in der Zerlegung von f.
(3) Die Ordnung von f an der Lokalisierung $K[X]_{(X-a)}$ von $K[X]$ am maximalen Ideal $(X - a)$.
(4) Die Schnittmultiplizität von C mit der x-Achse im Punkt $(a, 0)$.

Aufgabe 26.3. Es seien $H_1, H_2 \in K[X]$ verschiedene Polynome und $C = V(Y - H_1)$ und $D = V(Y - H_2)$ die zugehörigen Graphen, aufgefasst als ebene algebraische Kurven in $\mathbb{A}^2_K$. Es sei $a \in K$ ein Punkt mit

$$H_1(a) = H_2(a) =: b.$$

Zeige, dass die Schnittmultiplizität von C und D im Punkt (a, b) mit der Schnittmultiplizität des Graphen von $H_1 - H_2$ und der X-Achse im Punkt $(a, 0)$ übereinstimmt.

Aufgabe 26.4. Es sei eine monomiale ebene Kurven $C = V(X^d - Y^e)$ (mit d, e teilerfremd) gegeben. Berechne die Schnittmultiplizität der Kurve mit einer jeden Geraden G durch den Nullpunkt.

Aufgabe 26.5. Zeige, dass sich die Schnittmultiplizität von ebenen Kurven nicht bei einer affinen Variablentransformation ändert.

Aufgabe 26.6. Es sei $P \in C$ ein glatter Punkt einer ebenen Kurve $C \subseteq \mathbb{A}^2_K$ mit der Tangente G. Zeige, dass die Schnittmultiplizität von C und G im Punkt $P \geq 2$ ist.

Aufgabe 26.7. Berechne die Schnittmultiplizität der beiden monomialen Kurven

$$C = V(X^2 - Y^3) \text{ und } D = V(X^3 - Y^2)$$

im Nullpunkt.

Aufgabe 26.8.*

Bestimme die Schnittmultiplizität im Nullpunkt des Kartesischen Blattes

$$C \,=\, V(X^3 + Y^3 - 3XY)$$

mit jeder affinen Geraden der affinen Ebene. Man setze voraus, dass die Charakteristik des Körpers nicht 3 ist.

Man setze voraus, dass die Charakteristik des Körpers nicht 3 ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 26.9. (4 Punkte)

Berechne die Schnittmultiplizität der beiden monomialen Kurven

$$C = V(X^5 - Y^2) \text{ und } D = V(X^7 - Y^3)$$

im Nullpunkt.

Aufgabe 26.10. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und seien $C = V(F)$ und $D = V(G)$ ebene algebraische Kurven. Es sei $P \in C$ ein glatter Punkt, so dass der lokale Ring $R = (K[X,Y]_{\mathfrak{m}})/(F)$ ein diskreter Bewertungsring ist. Zeige, dass die Beziehung

$$\operatorname{mult}_P(F,G) \,=\, \operatorname{ord}(G)$$

gilt, wobei ord die Ordnung im Bewertungsring R bezeichnet.

Aufgabe 26.11. (4 Punkte)

Betrachte die Parabel $C = V(Y - X^2)$ und den Kreis D mit Mittelpunkt $(0,r)$ und Radius r. Bestimme die Schnittpunkte von C und D und die jeweiligen Schnittmultiplizitäten.

Aufgabe 26.12. (4 Punkte)

Bestimme für den Restklassenring $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1, X^2+Y^2-a)$ (für jedes $a \in \mathbb{C}$) eine Beschreibung als Produktring von lokalen Ringen. Man gebe dabei die $\mathbb{C}$-Dimensionen der beteiligten Ringe an.

Aufgabe 26.13. (8 Punkte)

Es seien zwei verschiedene monomiale ebene Kurven $C = V(X^d - Y^e)$ und $D = V(X^r - Y^s)$ gegeben (mit d, e und r, s teilerfremd). Berechne die Schnittmultiplizität der beiden Kurven im Nullpunkt.