

**Algebraische Kurven****Arbeitsblatt 25****Übungsaufgaben****AUFGABE 25.1.\***

Bestimme für die ebene algebraische Kurve

$$V(X^3 + Y^2 - XY + X)$$

eine nichtkonstante Potenzreihenlösung  $X = F(Y)$  im Nullpunkt bis zum sechsten Glied.

**AUFGABE 25.2.\***

Bestimme für die ebene algebraische Kurve

$$V(X^2Y + X^2 + Y^2 - 5XY + Y)$$

eine nicht-konstante Potenzreihenlösung  $Y = F(X)$  im Nullpunkt bis zur fünften Ordnung.

**AUFGABE 25.3.** Betrachte die Kardioide

$$V((X^2 + Y^2)^2 - 2X(X^2 + Y^2) - Y^2)$$

im Punkt  $(2, 0)$ . Bestimme eine formale Parametrisierung (bis zum fünften Term) der Kurve in diesem Punkt in Abhängigkeit von einem Tangentenparameter.

**AUFGABE 25.4.** Betrachte die durch  $y = 2x^4 + 3x^2 - x + 1$  gegebene Kurve im Punkt  $P = (1, 5)$  in den in Aufgabe 24.9 gefundenen Koordinaten. Bestimme die Potenzreihe für die Kurve in  $P$  entlang der Tangente.

**AUFGABE 25.5.** Sei  $K$  ein Körper. Eine *formale Laurentreihe* ist eine unendliche Summe der Form

$$F = \sum_{n=k}^{\infty} a_n T^n \text{ mit } a_n \in K \text{ und } k \in \mathbb{Z}.$$

Zeige, dass der Ring der formalen Laurentreihen (mit geeigneten Ringoperationen) isomorph zum Quotientenkörper des Potenzreihenringes  $K[[T]]$  ist.

Die folgenden Aufgaben beschäftigen sich mit der Kompletzierung eines lokalen Ringes.

AUFGABE 25.6. Betrachte zu einem lokalen Ring  $R$  mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  das Diagramm

$$\longrightarrow R/\mathfrak{m}^4 \longrightarrow R/\mathfrak{m}^3 \longrightarrow R/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow R/\mathfrak{m}.$$

Dabei sind die Abbildungen die kanonischen Projektionen  $\varphi_n : R/\mathfrak{m}^{n+1} \rightarrow R/\mathfrak{m}^n$ , die durch die Idealinklusionen  $\mathfrak{m}^{n+1} \subseteq \mathfrak{m}^n$  induziert werden. Eine Folge von Elementen

$$a_n \in R/\mathfrak{m}^n$$

heißt *verträglich*, wenn  $\varphi_n(a_{n+1}) = a_n$  für alle  $n$  gilt. Definiere eine Ringstruktur auf der Menge aller verträglichen Elemente (diesen Ring nennt man die *Kompletzierung* von  $R$ .) Zeige ferner, dass es einen kanonischen Ringhomomorphismus von  $R$  in die Kompletzierung gibt.

AUFGABE 25.7. Sei  $R$  ein eindimensionaler lokaler noetherscher kommutativer Ring. Zeige, dass die kanonische Abbildung von  $R$  in die Kompletzierung von  $R$  injektiv ist.

Bemerkung: Die Injektivität gilt für jeden noetherschen lokalen Ring, ist aber schwieriger zu beweisen.

AUFGABE 25.8. Sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $I$  ein Ideal. Zeigen Sie, dass durch

$$\{x + I^n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in R)$$

Umgebungsbasen definiert werden. Zeigen Sie außerdem, dass die auf  $R$  induzierte Topologie genau dann hausdorffsch ist, wenn  $\bigcap_n I^n = \{0\}$ .

Bemerkung: Die Kompletzierung eines lokalen Ringes bezüglich seines maximalen Ideals entspricht dann genau der (topologischen) Kompletzierung bezüglich dieser Topologie.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 25.9. (4 Punkte)

Betrachte den Einheitskreis  $X^2 + Y^2 = 1$  im Punkt  $(1, 0)$ . Bestimme Potenzreihen  $G$  und  $H \in K[[T]]$  mit den Anfangsbedingungen  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = 1$  und mit  $G(T)^2 + H(T)^2 = 1$ .

AUFGABE 25.10. (4 Punkte)

Betrachte die Neilsche Parabel  $C = V(Y^3 - X^2)$  im Punkt  $(1, 1)$ . Finde eine Parametrisierung der Kurve in diesem Punkt mit Potenzreihen (bis zum fünften Glied) derart, dass eine Potenzreihe davon ein lineares Polynom ist.

AUFGABE 25.11. (4 Punkte)

Sei  $K$  ein Körper und sei  $K[T]$  der Polynomring in einer Variablen. Es sei  $R$  die Lokalisierung von  $K[T]$  am maximalen Ideal  $\mathfrak{m} = (T)$ . Zeige, dass die Kompletterung von  $R$  isomorph zum Potenzreihenring  $K[[T]]$  ist.

AUFGABE 25.12. (4 Punkte)

Sei  $K$  ein Körper und  $R = K[[T]]$  der Potenzreihenring. Zeige, dass es in  $R$  keine Quadratwurzel für  $T$  gibt. Zeige ferner, dass für  $K = \mathbb{Z}/(7)$  das Element  $T + 2$  eine Quadratwurzel in  $R$  besitzt, und gebe die ersten fünf Koeffizienten von einer Quadratwurzel davon an.

AUFGABE 25.13. (5 Punkte)

Sei  $F \in K[X, Y]$  ein irreduzibles Polynom und  $R = K[X, Y]/(F)$  der integrale Koordinatenring der ebenen Kurve  $C = V(F)$ . Es sei  $R \rightarrow S = R^{\text{norm}}$  die Normalisierung von  $R$  und es sei  $R \rightarrow K[[T]]$  der Ringhomomorphismus zu einer nichtkonstanten formalen Potenzreihenlösung der Kurve. Zeige, dass es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus  $S \rightarrow K[[T]]$  gibt derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ & \searrow & \downarrow \\ & & K[[T]] \end{array}$$

kommutiert.

### Aufgabe zum Hochladen

AUFGABE 25.14. (3 Punkte)

Zeichne mittels eines geeigneten Programms eine der Beispielkurven der Vorlesung sowie die verschiedenen dort berechneten polynomialen Approximationen.