Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 24

Übungsaufgaben

Aufgabe 24.1. Beschreibe ein Beispiel einer glatten Kurve $C \subset \mathbb{A}^2_K$ mit einer Parametrisierung, deren Differential an mindestens einem Punkt verschwindet.

Aufgabe 24.2. Sei R ein kommutativer Ring und sei $R[[T]]$ der Potenzreihenring. Zeige, dass die Abbildung

$$R[[T]] \longrightarrow R[[T]],\ F \longmapsto a_0,$$

die einer Potenzreihe ihren konstanten Term zuordnet, ein R-Algebrahomomorphismus ist.

Aufgabe 24.3. Sei K ein Körper und $K[[T]]$ der Potenzreihenring. Man gebe die inverse Potenzreihe zu $1-T$ an.

Aufgabe 24.4. Es sei K ein Körper. Zeige, dass der Potenzreihenring

$$R[[T_1, \ldots, T_n]]$$

ein lokaler Ring ist.

Aufgabe 24.5. Es sei R ein kommutativer Ring und es sei $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ der Potenzreihenring über R. Es sei $\frac{\partial}{\partial X_1}$ die (formale) partielle Ableitung bezüglich X_1, also die Abbildung

$$R[[X_1, \ldots, X_n]] \longrightarrow R[[X_1, \ldots, X_n]],\ f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial X_1}.$$

Zeige, dass dies eine R-Derivation ist.

Aufgabe 24.6. Sei K ein Körper, $\mathfrak{m} = (T) \subset K[T]$ das zum Nullpunkt gehörige maximale Ideal mit der Lokalisierung $R = K[T]_{\mathfrak{m}}$. Definiere einen K-Algebrahomomorphismus

$$\varphi\colon\ R \longrightarrow K[[T]]$$

mit $\varphi(T) = T$, wobei $K[[T]]$ den Ring der formalen Potenzreihen bezeichnet.

Aufgabe 24.7. Sei K ein Körper, $\mathfrak{m} = (T) \subset K[T]$ das zum Nullpunkt gehörige maximale Ideal mit der Lokalisierung $R = K[T]_{\mathfrak{m}}$ und sei

$$R \longrightarrow K[[T]]$$

der K-Algebrahomomorphismus aus Aufgabe 24.6. Zeige, dass sich unter dieser Abbildung die Ordnung von Elementen nicht ändert.

Aufgabe 24.8. Berechne die ersten fünf Glieder (bis einschließlich c_4) der eingesetzten Potenzreihe $F(G)$ im Sinne von Definition 24.8.

Die folgende Aufgabe zeigt, dass die Bedingung an die eingesetzte Potenzreihe in Lemma 24.9 notwendig ist.

Aufgabe 24.9. Zeige, dass man die konstante Potenzreihe $G = 1$ nicht sinnvoll in beliebige Potenzreihen einsetzen kann.

Aufgabe 24.10. Es sei M ein kommutatives Monoid und sei $\delta\colon M \to \mathbb{N}$ ein Monoidhomomorphismus mit der Eigenschaft, dass zu jedem $d \in \mathbb{N}$ das Urbild $M_d = \{m \in M \,|\, \delta(m) = d\}$ endlich sei. Es sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass

$$R[[M]] = \left\{ \sum_{m \in M} a_m T^m \,|\, a_m \in R \right\}$$

mit naheliegenden Verknüpfungen eine kommutative R-Algebra ist, die den Monoidring $R[M]$ enthält.

Aufgabe 24.11. Es sei $M = \mathbb{N}^r$ und sei $\delta\colon \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$ die Standardgraduierung auf $\mathbb{N}^r$, also die durch $e_i \mapsto 1$ gegebene Abbildung. Es sei R ein kommutativer Ring. und sei $R[[\mathbb{N}^r]]$ wie in Aufgabe 24.10 definiert. Zeige

$$R[[\mathbb{N}^r]] = R[[T_1, \ldots, T_r]].$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 24.12. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für ein irreduzibles reelles Polynom $F \in \mathbb{R}[X, Y]$ derart, dass beide partiellen Ableitungen übereinstimmen und nicht konstant sind. Zeige, dass dies über $\mathbb{C}$ nicht möglich ist.

Aufgabe 24.13. (3 Punkte)

Betrachte die Kurve $C = V(X^2 - Y^2 - Y^3)$ mit der in Beispiel 24.2 besprochenen Parametrisierung. Bestimme die singulären Punkte der Kurve zusammen mit den Multiplizitäten und Tangenten. Berechne ebenfalls die Bildpunkte und die Tangenten für die Parameterwerte $t = -1, 0, 1$.

Aufgabe 24.14. (3 Punkte)

Beschreibe eine formale Potenzreihe über $\mathbb{C}$, die in keiner Umgebung des Nullpunktes konvergiert.

Aufgabe 24.15. (3 Punkte)

Sei K ein Körper. Vergleiche die beiden Ringe $(K[X])[[Y]]$ und $(K[[Y]])[X]$.

Aufgabe 24.16. (6 Punkte)

Sei R ein noetherscher kommutativer Ring. Man zeige, dass $R[[T_1, \ldots, T_n]]$ noethersch ist.

Hinweis: Lassen Sie sich vom Beweis des Hilbertschen Basissatzes inspirieren!