Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 22

Übungsaufgaben

Aufgabe 22.1. Zeige, dass zu $a \in \mathbb{C}$ der Einsetzungshomomorphismus

$$\mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C},\ X \longmapsto a,$$

mit der Evaluationsabbildung (in den Restekörper $\mathbb{C}[X]_{(X-a)}/(X-a)\mathbb{C}[X]_{(X-a)}$) zum Primideal $(X-a)$ übereinstimmt.

Aufgabe 22.2. Es sei $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal in einem kommutativen Ring R. Es sei $R_\mathfrak{n}$ die Lokalisierung von R an $\mathfrak{n}$ und es sei $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}R_\mathfrak{n}$ das maximale Ideal von $R_\mathfrak{n}$. Zeige $R/\mathfrak{n} = R_\mathfrak{n}/\mathfrak{m}$.

Aufgabe 22.3. Es sei R der lokale Ring zum Überkreuzungspunkt des dreidimensionalen Achsenkreuzes. Bestimme dessen Einbettungsdimension.

Aufgabe 22.4. Man gebe ein Beispiel für eine Kurve $C \subseteq \mathbb{A}_K^n$ derart, dass es auf ihr Punkte $P_1, P_2, P_3 \in C$ gibt, deren Einbettungsdimensionen gleich $1, 2, 3$ sind.

Aufgabe 22.5. Es sei $H(X) \in K[X]$, sei $F = Y - H$ und $C = V(F) \subseteq \mathbb{A}_K^2$ der Graph von H, aufgefasst als ebene algebraische Kurve. Es sei

$$P = (a, b) = (a, H(a))$$

ein Punkt des Graphen.

(1) Zeige, dass die Multiplizität von C in P gleich 1 ist.
(2) Zeige, dass die Tangente in P an C mit der üblichen Tangente an einen Graphen im Punkt a übereinstimmt.

Aufgabe 22.6. Es sei K ein Körper und seien $F_1, \ldots, F_m \in K[X_1, \ldots, X_\ell]$ und $G_1, \ldots, G_n \in K[X_1, \ldots, X_m]$ Polynome, die zu den polynomialen Abbildungen

$$\mathbb{A}_K^\ell \xrightarrow{F} \mathbb{A}_K^m \xrightarrow{G} \mathbb{A}_K^n$$

Anlass geben. Es seien $J(F)_P$ und $J(G)_Q$ die durch formales partielles Ableiten definierten Jacobi-Matrizen. Beweise die formale Kettenregel

$$J(G \circ F)_P \,=\, J(G)_{F(P)} \circ J(F)_P.$$

Aufgabe 22.7.*

(1) Zeige, dass formales partielles Ableiten auf dem Polynomring

$$K[X_1, \ldots, X_n]$$

bezüglich einer Variablen und Dehomogenisieren bezüglich einer anderen Variablen vertauschbar sind.

(2) Zeige, dass dies nicht für die gleiche Variable stimmt.

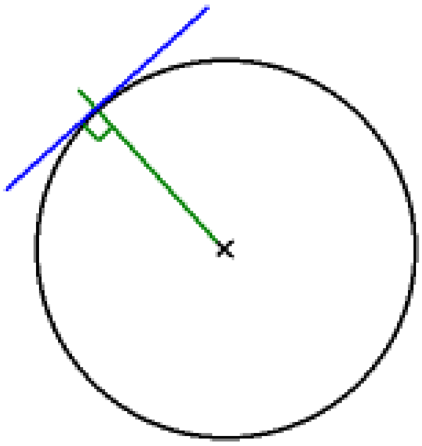
Aufgabe 22.8. Es sei $H \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein (in der Standardgraduierung) homogenes Polynom vom Grad e. Zeige die Beziehung

$$eH \,=\, X_1 \frac{\partial H}{\partial X_1} + \cdots + X_n \frac{\partial H}{\partial X_n}.$$

Aufgabe 22.9. Betrachte die durch $y = 2x^4 + 3x^2 - x + 1$ gegebene Kurve mit dem Punkt $P = (1, 5)$. Finde eine Koordinatentransformation derart, dass P zum Punkt $(0, 0)$ wird und die Tangente an P zur x-Achse.

Aufgabe 22.10. Sei K ein Körper und $F \in K[X, Y]$ ein nichtkonstantes Polynom mit einfachen Primfaktoren und mit zugehöriger ebener Kurve $C = V(F)$. Zeige, dass C nur endlich viele singuläre Punkte besitzt.

Aufgabe 22.11. Beweise Lemma 22.12.



Aufgabe 22.12. Zeige, dass der Einheitskreis über einem Körper der Charakteristik $\neq 2$ glatt ist und bestimme für jeden Punkt die Gleichung der Tangente.

Aufgabe 22.13. Sei K ein Körper.

a) Zeige, dass der Graph eines Polynoms $F \in K[X]$ eine glatte algebraische Kurve ist.

b) Seien $F, G \in K[X]$ Polynome ohne gemeinsame Nullstelle. Zeige, dass der Graph der rationalen Funktion F/G ebenfalls eine glatte algebraische Kurve ist.

Aufgabe 22.14.*

Bestimme die singulären Punkte der ebenen algebraischen Kurve

$$V\left(-2X^3 + 3X^2Y - Y + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}.$$

Aufgabe 22.15.*

Es sei $P \in C = V(F) \subset \mathbb{A}^2_K$ ein glatter Punkt einer ebenen irreduziblen Kurve. Zeige, dass der zugehörige lokale Ring ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 22.16. Bestimme für die in Beispiel 8.5 berechnete Trajektorie die Koordinaten der Punkte, wo die Kurve singulär ist.

Aufgabe 22.17.*

Betrachte die beiden reellen Kurven

$$V(X^5 - X^3 + 2XY + 7Y^2 - 9)$$

im Punkt $(1, 1)$ und

$$V(X^4 + Y^4 - 3X^2Y^2 + 5X + 7X)$$

im Nullpunkt. Sind diese beiden Kurven lokal in den angegebenen Punkten zueinander diffeomorph?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.18. (3 Punkte)

Sei K ein Körper der Charakteristik $p \geq 0$. Man charakterisiere die Polynome $F \in K[X, Y]$ mit der Eigenschaft, dass

(1) die erste partielle Ableitung,
(2) die zweite partielle Ableitung,
(3) beide partiellen Ableitungen

0 sind.

Aufgabe 22.19. (4 Punkte)

Bestimme für die Kurve $V(X^3 + Y^3 - 3XY + 1)$ die singulären Punkte über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$. Man gebe jeweils die Multiplizität und die Tangenten an.

Aufgabe 22.20. (3 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $G, H \in K[X, Y]$ Polynome mit $G(P) = H(P) = 0$ für einen bestimmten Punkt $P \in \mathbb{A}^2_K$. Es sei $F = GH$. Zeige, dass jede Tangente von G in P und jede Tangente von H in P auch eine Tangente von F in P ist.

Aufgabe 22.21. (6 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Betrachte die Kurve

$$C = V(x^3 + 5x^2y - 6xy^2 - x^2 - xy + 4y^2).$$

(1) Bestimme die Tangenten im Nullpunkt.
(2) Zeige, dass $P = (1, 2)$ ein Punkt der Kurve ist, und berechne die Tangente(n) von C in P über die Ableitung.

(3) Führe eine Variablentransformation durch derart, dass P in den neuen Variablen der Nullpunkt ist, und bestimme die Tangente(n) in P aus der transformierten Kurvengleichung.

Aufgabe 22.22. (4 Punkte)

Bestimme für die algebraische Kurve

$$C = V\left(9y^4 + 10x^2y^2 + x^4 - 12y^3 - 12x^2y + 4y^2\right)$$

die Singularitäten sowie deren Multiplizitäten und Tangenten.

(Vergleiche dazu Beispiel 8.5.)

Abbildungsverzeichnis