Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 21

Übungsaufgaben

Aufgabe 21.1. Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid, das von teilerfremden Erzeugern erzeugt werde, es sei $K[M]$ der Monoidring zu M über einem Körper K und es sei

$$R = K[M]_{\mathfrak{m}}$$

die Lokalisierung am maximalen Ideale $\mathfrak{m} = K[M_+] = \langle T^m, m \in M \rangle$. Zeige, dass R allein im Fall $M = \mathbb{N}$ ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 21.2. Beweise für einen diskreten Bewertungsring die Eigenschaften der Ordnung, die in Lemma 21.6 formuliert sind.

Aufgabe 21.3. Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper Q. Zeige, dass es keinen echten Zwischenring zwischen R und Q gibt.

Aufgabe 21.4. Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper Q. Charakterisiere die endlich erzeugten R-Untermoduln von Q. Auf welche Form kann man ein Erzeugendensystem bringen?

Aufgabe 21.5. Sei R ein diskreter Bewertungsring. Definiere zu einem Element $q \in Q(R)$, $q \neq 0$, die Ordnung

$$\operatorname{ord}(q) \in \mathbb{Z}\,.$$

Dabei soll die Definition mit der Ordnung für Elemente aus R übereinstimmen und einen Gruppenhomomorphismus $Q(R) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ definieren. Was ist der Kern dieses Homomorphismus?

Aufgabe 21.6. Es sei $V = V(x^2 + y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2_K$ der Einheitskreis über einem Körper K und es sei $P = (a, b) \in V$ ein Punkt.

(1) Zeige, dass der lokale Ring R von V im Punkt P ein diskreter Bewertungsring ist.
(2) Folgere, dass der Koordinatenring $K[X,Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ normal ist (man kann K algebraisch abgeschlossen annehmen).

(3) Zeige, dass $K[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ nicht faktoriell ist.
(4) Bestimme die Ordnung von X und von $Y-1$ im lokalen Ring zum Punkt $(0,1)$.

Aufgabe 21.7. Sei R ein diskreter Bewertungsring und sei $\mathfrak{m} = (\pi)$. Es sei $K = R/(\pi)$ der Restklassenkörper von R. Zeige, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen R-Modulisomorphismus

$$(\pi^n)/(\pi^{n+1}) \longrightarrow K$$

gibt.

Aufgabe 21.8.*

Sei K ein Körper und sei

$$\nu\colon\ (K^\times, \cdot, 1) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +, 0)$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\nu(f+g) \geq \min\{\nu(f), \nu(g)\}$ für alle $f, g \in K^\times$. Zeige, dass

$$R = \left\{ f \in K^\times \,|\, \nu(f) \geq 0 \right\} \cup \{0\}$$

ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 21.9. Es sei $f \in \mathbb{C}[X]$, $f \neq 0$, und $a \in \mathbb{C}$. Zeige, dass die folgenden „Ordnungen“ von f an der Stelle a übereinstimmen.

(1) Die Verschwindungsordnung von f an der Stelle a, also die maximale Ordnung einer Ableitung mit $f^{(k)}(a) = 0$.
(2) Der Exponent des Linearfaktors $X - a$ in der Zerlegung von f.
(3) Die Ordnung von f an der Lokalisierung $\mathbb{C}[X]_{(X-a)}$ von $\mathbb{C}[X]$ am maximalen Ideal $(X-a)$.

Die vorstehende Aufgabe kann man über das Konzept des formalen Ableitens auf andere Grundkörper erweitern.

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zu einem Polynom

$$F = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$$

heißt das Polynom

$$F' = na_nX^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \cdots + 3a_3X^2 + 2a_2X + a_1$$

die *formale Ableitung* von F.

Aufgabe 21.10. Bestimme die formale Ableitung von

$$2X^7 + X^6 + 2X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + 2 \in \mathbb{Z}/(3)[X]\,.$$

Aufgabe 21.11. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Beweise die folgenden Rechenregeln für das formale Ableiten $F \mapsto F'$:

(1) Die Ableitung eines konstanten Polynoms ist null.
(2) Die Ableitung ist K-linear.
(3) Es gilt die *Produktregel*, also
$$(FG)' = FG' + F'G.$$

Aufgabe 21.12. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $F \in K[X]$ und $a \in K$. Zeige, dass a genau dann eine mehrfache Nullstelle von F ist, wenn $F'(a) = 0$ ist, wobei F' die formale Ableitung von F bezeichnet.

Aufgabe 21.13. Sei K ein Körper der positiven Charakteristik $p > 0$. Bestimme die Menge der Polynome $F \in K[T]$ mit formaler Ableitung $F' = 0$.

Aufgabe 21.14. Zeige, dass über einem Körper K der Charakteristik 0 für das formale Ableiten die Beziehung ($i \leq n$)
$$\frac{1}{i!} (X^n)^{(i)} = \binom{n}{i} X^{n-i}$$
gilt.

Aufgabe 21.15. Es sei K ein Körper der Charakteristik 0 und sei $f \in K[X]$, $f \neq 0$, und $a \in K$. Zeige, dass die folgenden „Ordnungen“ von f an der Stelle a übereinstimmen.

(1) Die Verschwindungsordnung von f an der Stelle a, also die maximale Ordnung einer formalen Ableitung mit $f^{(k)}(a) = 0$.
(2) Der Exponent des Linearfaktors $X - a$ in der Zerlegung von f.
(3) Die Ordnung von f an der Lokalisierung $K[X]_{(X-a)}$ von $K[X]$ am maximalen Ideal $(X - a)$.

Die nächste Aufgabe benötigt die folgenden Definitionen, die das Bewertungskonzept verallgemeinern.

Es sei K ein Körper und $(A, \cdot, <)$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Eine *Bewertung* auf K mit Werten in A ist ein Gruppenhomomorphismus $\nu : K^\times \to A$, so dass für alle $x, y \in K^\times$ mit $x \neq -y$ gilt
$$\nu(x + y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\}.$$

Es sei ν eine Bewertung auf einem Körper K. Dann ist
$$\left\{x \in K^\times \,|\, \nu(x) \geq 0\right\} \cup \{0\}$$

ein Unterring von K, der sogenannte *Bewertungsring* von ν.

Ein nullteilerfreier Ring R mit Quotientenkörper K heißt ein *Bewertungsring* (oder *abstrakter Bewertungsring*), falls eine Bewertung ν von K existiert, so dass R der Bewertungsring von ν ist.

Aufgabe 21.16. Zeige, dass ein noetherscher abstrakter Bewertungsring schon diskret ist.

Aufgabe 21.17. Es sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring. Zeige, dass aus $\mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^n$ folgt, dass $\mathfrak{m}^n = 0$ ist.

Aufgabe 21.18. Es sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Integritätsbereich, der kein Körper sei. Es sei Q der Quotientenkörper von R. Zeige $\mathfrak{m}Q = Q$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.19. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $K(T)$ der Körper der rationalen Funktionen über K. Finde einen diskreten Bewertungsring $R \subset K(T)$ mit $Q(R) = K(T)$ und mit $R \cap K[T] = K$.

Aufgabe 21.20. (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Eine *Potenzreihe in einer Variablen* über K ist ein formaler Ausdruck der Form

$$a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3 + \ldots \text{ mit } a_i \in K\,.$$

Es kann hier also unendlich viele von 0 verschiedene Koeffizienten a_i geben. Definiere eine Ringstruktur auf der Menge aller Potenzreihen, die die Ringstruktur auf dem Polynomring in einer Variablen fortsetzt. Zeige, dass dieser Ring ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 21.21. (4 Punkte)

Es sei R ein Integritätsbereich mit folgender Eigenschaft: zu je zwei Elementen $f, g \in R$ gelte, dass f ein Teiler von g ist oder dass g ein Teiler von f ist. Es sei R noethersch, aber kein Körper. Zeige, dass R ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 21.22. (3 Punkte)

Zeige, dass in $K[X,Y]_{(X,Y)}/(X^2 - Y^3)$ jedes Ideal durch maximal zwei Erzeuger gegeben ist.

Aufgabe 21.23. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer ebenen monomialen Kurve und eines Ideals im zugehörigen lokalen Ring der Singularität, das nicht von zwei Elementen erzeugt werden kann.