Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 20

Übungsaufgaben

Aufgabe 20.1. Es sei p eine Primzahl. Zeige, unter Verwendung der eindeutigen Primfaktorzerlegung von natürlichen Zahlen, dass die reelle Zahl $\sqrt{p}$ irrational ist.

Aufgabe 20.2.*

Beweise mit Hilfe der eindeutigen Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}$, dass $9^{1/3}$ irrational ist.

Aufgabe 20.3. Sei K ein Körper und sei $R_i \subseteq K$, $i \in I$, eine Familie von normalen Unterringen. Zeige, dass auch der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} R_i$ normal ist.

Aufgabe 20.4. Sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass R genau dann normal ist, wenn er mit seiner Normalisierung übereinstimmt.

Aufgabe 20.5. Sei R ein Integritätsbereich. Sei angenommen, dass die Normalisierung von R gleich dem Quotientenkörper $Q(R)$ ist. Zeige, dass dann R selbst schon ein Körper ist.

Aufgabe 20.6.*

Sei R ein normaler Integritätsbereich und $f \in R$, $f \neq 0$. Zeige, dass die Nenneraufnahme R_f ebenfalls normal ist.

Aufgabe 20.7. Sei R ein normaler Integritätsbereich und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass dann auch die Nenneraufnahme R_S normal ist.

Aufgabe 20.8.*

(1) Skizziere die Nullstellengebilde
$$V = V(XY, XZ, YZ) \subseteq \mathbb{A}_K^3$$
und
$$W = V(ST(S-T)) \subseteq \mathbb{A}_K^2$$
im reellen Fall.
(2) Stifte einen bijektiven Morphismus
$$\varphi \colon V \longrightarrow W.$$
(3) Zeige, dass der Morphismus φ außerhalb des Nullpunktes ein Isomorphismus ist (die Charakteristik des Körpers sei $\neq 2$).

Aufgabe 20.9. Sei M ein torsionsfreies Monoid. Zeige, dass dann auch die Differenzengruppe $\Gamma(M)$ torsionsfrei ist.

Aufgabe 20.10. Sei M ein kommutative Gruppe. Zeige, dass die Torsionsfreiheit von M äquivalent zu folgender Eigenschaft ist: Aus $m \in M$ und $rm = 0$ für ein positives $r \in \mathbb{N}$ folgt stets $m = 0$. Zeige ferner, dass diese Äquivalenz für ein Monoid nicht gelten muss.

Aufgabe 20.11.*

Wir betrachten das Nullstellengebilde
$$C = V(Y^2 - X^4) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2.$$

(1) Ist C irreduzibel?
(2) Kann man den Koordinatenring $\mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^4)$ als Monoidring erhalten?
(3) Kann man den Koordinatenring $\mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^4)$ als Monoidring zu einem Untermonoid $M \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}/(2)$ erhalten?

Aufgabe 20.12.*

Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei $M \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}/(n)$ ein Untermonoid. Zeige, dass $m \in M$ genau dann eine Einheit ist, wenn m aufgefasst in $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}/(n)$ eine Einheit ist.

Aufgabe 20.13.*

Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass das $\mathbb{C}$-Spektrum des kommutativen Monoids $M = \mathbb{N} \times \mathbb{Z}/(n)$ aus n irreduziblen Komponenten besteht, die alle isomorph zur affinen Geraden $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ sind.

Aufgabe 20.14. Sei R ein Integritätsbereich mit Normalisierung R^{norm}. Zeige, dass durch

$$\mathfrak{f} = \{g \in R \mid gR^{\text{norm}} \subseteq R\}$$

ein Ideal in R gegeben ist.

Aufgabe 20.15. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid, das von teilerfremden natürlichen Zahlen erzeugt werde. Zeige, dass für das Führungsideal des zugehörigen Monoidrings $K[M]$ die Beziehung

$$\mathfrak{f} = (M_{\geq f})$$

besteht, wobei f die Führungszahl des Monoids bezeichnet.

Aufgabe 20.16.*

Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid. Zeige, dass der Singularitätsgrad von M mit den beiden folgenden Zahlen übereinstimmt.

(1) Die maximale Länge einer Kette von Monoiden

$$M = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n = \mathbb{N}$$

(2) Die maximale Länge einer Kette von K-Algebren

$$K[M] = R_0 \subset R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_n = K[T].$$

(3) Die maximale Länge einer Kette (einer Fahne) von K-Untervektorräumen

$$K[M] = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = K[T].$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 20.17. (3 Punkte)

Sei R ein normaler Integritätsbereich und $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung. Sei $f \in R$. Zeige, dass für das von f erzeugte Hauptideal gilt:

$$R \cap (f)S = (f)R.$$

Aufgabe 20.18. (6 Punkte)

Sei R ein normaler Integritätsbereich. Zeige, dass dann auch der Polynomring $R[X]$ normal ist.

Aufgabe 20.19. (5 Punkte)

Sei R ein normaler Integritätsbereich und $a \in R$. Es sei vorausgesetzt, dass a keine Quadratwurzel in R besitzt. Zeige, dass das Polynom $X^2 - a$ prim in $R[X]$ ist. Tipp: Verwende den Quotientenkörper $Q(R)$. Warnung: Prim muss hier nicht zu irreduzibel äquivalent sein.

Aufgabe 20.20. (4 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) R ist normal.
(2) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ normal.
(3) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{m}}$ normal.

(Man sagt daher, dass normal eine *lokale Eigenschaft* ist.)

Aufgabe 20.21. (2 Punkte)

Sei $M \subseteq \Gamma(M) \cong \mathbb{Z}^n$ ein Monoid und betrachte die Menge

$$M^* = \{\varphi : \Gamma(M) \longrightarrow \mathbb{Z} | \, \varphi(M) \subseteq \mathbb{N}\} .$$

Zeige, dass M^* ein normales Untermonoid von $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ ist.

(Dieses Monoid nennt man das *duale Monoid* zu M.)

Aufgabe 20.22. (3 Punkte)

Betrachte Beispiel 20.12. Welchen Wert haben die drei Erzeuger unter den dort angegebenen Monoidhomomorphismen φ_1, φ_2 nach $\mathbb{Z}$, durch die das Monoid beschrieben werden kann. Bestimme den Kokern des Gruppenhomomorphismus

$$\Gamma(M) \longrightarrow \mathbb{Z}^2, \, m \longmapsto (\varphi_1(m), \varphi_2(m)).$$

(Diesen Kokern nennt man die *Divisorenklassengruppe* des Monoidringes.)