Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 2

Übungsaufgaben

AUFGABE 2.1. Betrachte in $\mathbb{A}_K^3$ die beiden Ebenen

$$E_1 = V(3x + 4y + 5z) \text{ und } E_2 = V(2x - y + 3z)\,.$$

Parametrisiere den Schnitt $E_1 \cap E_2$.

AUFGABE 2.2.*

Bestimme die Schnittpunkte des Einheitskreises mit der Geraden, die durch die beiden Punkte $(-1, 1)$ und $(4, -2)$ verläuft.

AUFGABE 2.3. Bestimme die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der Geraden G und des Kreises K, wobei G durch die Gleichung $3y - 4x + 2 = 0$ und K durch den Mittelpunkt $(2, 5)$ und den Radius 7 gegeben ist.

AUFGABE 2.4. Berechne die Schnittpunkte der beiden Kurven

$$C = V(x^2 + 2y^2 + 3xy + x - 2) \text{ und } L = V(4x + 3y - 5)\,.$$

AUFGABE 2.5. Zeige: Der Durchschnitt von zwei verschiedenen Kreisen in der affinen Ebene ist der Durchschnitt eines Kreises mit einer Geraden.

AUFGABE 2.6.*

Bestimme die Schnittpunkte des Einheitskreises E mit dem Kreis K, der den Mittelpunkt $(1, 0)$ und den Radius 2 besitzt.

AUFGABE 2.7.*

Bestimme die Schnittpunkte der beiden Ellipsen

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + xy + 3y^2 = 3\}$ und $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, 2x^2 - xy + y^2 = 4\}$.

AUFGABE 2.8.*

Bestimme die Schnittpunkte des Einheitskreises mit der Standardparabel.

Aufgabe 2.9.*

Es sei

$$P = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\right\}$$

die Standardparabel und K der Kreis mit dem Mittelpunkt $(0,1)$ und dem Radius 1.

(1) Skizziere P und K.
(2) Erstelle eine Gleichung für K.
(3) Bestimme die Schnittpunkte
$$P \cap K\,.$$
(4) Beschreibe die untere Kreisbogenhälfte als Graph einer Funktion von $[-1,1]$ nach $\mathbb{R}$.
(5) Bestimme, wie die Parabel relativ zum unteren Kreisbogen verläuft.

Aufgabe 2.10. Bestimme alle simultanen Lösungen der beiden Gleichungen

$$x^3 + y^2 = 2 \text{ und } 2xy = 3$$

für die Körper $K = \mathbb{Z}/(3)$, $\mathbb{Z}/(5)$ und $\mathbb{Z}/(7)$.

Aufgabe 2.11.*

Wir betrachten die Varietät der kommutierenden 2×2-Matrizen, also die Menge der Matrizenpaare

$$V = \{(A,B) \mid A, B \in \operatorname{Mat}_2(K),\ AB = BA\} \subseteq \operatorname{Mat}_2(K) \times \operatorname{Mat}_2(K) \cong \mathbb{A}_K^8.$$

(1) Zeige, dass dies eine affine Varietät ist, und bestimme möglichst einfache Gleichungen, die diese Varietät beschreiben.
(2) Zeige, dass die Abbildung
$$\pi\colon V \longrightarrow \operatorname{Mat}_2(K),\ (A,B) \longmapsto A,$$
surjektiv ist.
(3) Bestimme das Urbild von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ unter π.

Aufgabe 2.12. Zeige, dass zu einem Punkt $P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_K^n$ das zugehörige Ideal

$$(X_1 - a_1, X_2 - a_2, \ldots, X_n - a_n)$$

maximal ist.

Aufgabe 2.13. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $n \geq 2$. Zeige, dass ein Punkt $P \in \mathbb{A}_K^n$ nicht die Nullstellenmenge zu einem einzigen Polynom ist.

Aufgabe 2.14. Es sei K ein endlicher Körper und $M = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\} \in \mathbb{A}_K^n$ eine endliche Menge von Punkten. Zeige, dass M die Nullstellenmenge eines einzigen Polynoms ist.

Aufgabe 2.15. Bestimme Idealerzeuger für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{R}[X, Y, Z]$, dessen Nullstellenmenge genau die vier Punkte

$$(2, 3, 4), (1, 1/5, 0), (0, 0, 1), (-1, -2, \sqrt{3}) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$$

sind.

Aufgabe 2.16. Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ Ideale in einem kommutativen Ring R. Zeige, dass die Beziehung

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$$

gilt.

Aufgabe 2.17. Zeige, dass das Produkt von Hauptidealen wieder ein Hauptideal ist.

Aufgabe 2.18.*

Es seien I und J Ideale in einem kommutativen Ring R und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige die Gleichheit

$$(I + J)^n = I^n + I^{n-1}J + I^{n-2}J^2 + \cdots + I^2 J^{n-2} + IJ^{n-1} + J^n.$$

Aufgabe 2.19. Es sei K ein Körper. Wir betrachten in $K[X, Y]$ die beiden Primideale

$$\mathfrak{p} = (X) \subset (X, Y) = \mathfrak{m}.$$

Zeige, dass es kein Ideal $\mathfrak{a}$ mit

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{m}$$

gibt.

Aufgabe 2.20.*

Es sei R ein kommutativer Ring und $R[X]$ der Polynomring über R. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq R[X]$ ein Ideal mit Erzeugern

$$\mathfrak{a} = (F_0, F_1, \ldots, F_n),$$

wobei $F_0 = X - r$ mit $r \in R$ sei. Für $i \geq 1$ seien G_i die Elemente aus R, die enstehen, wenn man in F_i die Variable X durch r ersetzt. Zeige, dass eine Ringisomorphie der Restklassenringe

$$R[X]/\mathfrak{a} \cong R/(G_1, \ldots, G_n)$$

vorliegt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 2.21. (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$x^2 + y^2 + xy = 1$$

für die Körper $K = \mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_4$ und $\mathbb{F}_8$. Man kann für die Körper die Darstellungen auf [[Endliche Körper/Nicht Primkörper/Einige Operationstafeln]] verwenden.

Aufgabe 2.22. (3 Punkte)

Es sei $M = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\} \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ eine endliche Menge von Punkten. Zeige, dass M die Nullstellenmenge eines einzigen Polynoms ist.

Aufgabe 2.23. (3 Punkte)

Zeige, dass die Menge der reellen trigonalisierbaren (2×2)-Matrizen im $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ keine affin-algebraische Menge ist.

Aufgabe 2.24. (4 Punkte)

Bestimme die Schnittpunkte der beiden Ellipsen

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, 4x^2 - 3xy + 2y^2 = 7\}$ und $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, 3x^2 + 4xy + 5y^2 = 8\}$.

Aufgabe 2.25. (4 Punkte)

Es sei S das Nullstellengebilde in $\mathbb{A}^3_K$, das durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

gegeben ist. Der Schnitt von S mit einer Ebene E ist eine Kurve und wird in E durch eine Gleichung in zwei (geeigneten) Variablen beschrieben. Finde eine solche Gleichung für die Ebenen

$$E_1 = V(x),\ E_2 = V(z - 1),\ E_3 = V(x + 2y + 3z),\ E_4 = V(3x - 2z)\,.$$