Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 19

Übungsaufgaben

Aufgabe 19.1. Bestimme Idealerzeuger für die durch

$$\mathbb{A}^1_K \longrightarrow \mathbb{A}^3_K,\, t \longmapsto \left(t^2,\, t^3,\, t^4\right),$$

gegebene monomiale Kurve.

Aufgabe 19.2. Bestimme Idealerzeuger für die durch

$$\mathbb{A}^1_K \longrightarrow \mathbb{A}^3_K,\, t \longmapsto \left(t^4,\, t^5,\, t^6\right),$$

gegebene monomiale Kurve.

In den folgenden Aufgaben besprechen wir eine algebraische Realisierung des *Möbius-Bandes*, die auf dem Konzept eines Geradenbündels beruht.

Ein *Geradenbündel* L auf einer Varietät U (über einem Körper K) ist eine Varietät L zusammen mit einem Morphismus $p\colon L \to U$ und einer offenen affinen Überdeckung

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

derart, dass es Isomorphismen

$$\varphi_i\colon L|_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{A}^1_K$$

über U_i derart gibt, dass zu i, j die Übergangsabbildungen

$$\varphi_i|_{U_i \cap U_j} \circ \varphi_j^{-1}|_{U_i \cap U_j}\colon U_i \cap U_j \times \mathbb{A}^1_K \longrightarrow U_i \cap U_j \times \mathbb{A}^1_K$$

linear sind, also auf der Ringebene durch $T \mapsto rT$ mit $r \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O})^\times$ gegeben sind.

Zu jeder Varietät U gibt es das sogenannte *triviale Geradenbündel* $U \times \mathbb{A}^1_K$. Die Definition besagt, dass „lokal“ jedes Geradenbündel trivial ist, obwohl es „global“ keineswegs trivial sein muss.

Aufgabe 19.3. Es sei U eine Varietät und $p\colon L \to U$ ein Geradenbündel über U. Zeige, dass zu jedem Punkt $P \in U$ die Faser $p^{-1}(P)$ isomorph zu einer affinen Geraden $\mathbb{A}^1_K$ ist.

Aufgabe 19.4. Es sei U eine Varietät und $p\colon L \to U$ ein Geradenbündel über U. Zeige, dass es zu jedem Punkt $P \in U$ eine wohldefinierte K-Vektorraumstruktur auf der Faser $p^{-1}(P)$ gibt.

Aufgrund der vorstehenden Aussage besitzt jedes Geradenbündel einen *Nullschnitt*, der über jedem Basispunkt $P \in U$ aus dem Nullpunkt in der Faser besteht.

Aufgabe 19.5. Es sei U eine reelle Varietät, $p\colon L \to U$ das triviale Geradenbündel und $Z \subset L$ der Nullschnitt. Zeige, dass $L \setminus Z$ in der reellen Topologie nicht zusammenhängend ist.

Aufgabe 19.6. Es sei

$$U = D(X,Y) = \mathbb{A}_K^2 \setminus \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{A}_K^2$$

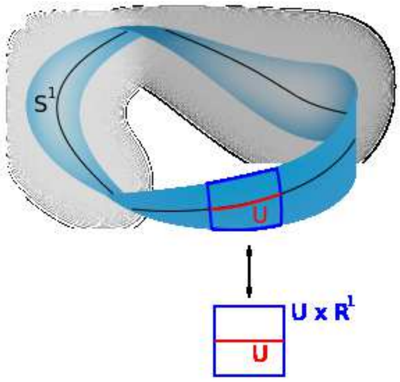
und

$$L = V(XU + YV) \subseteq \mathbb{A}_K^4$$

zusammen mit der natürlichen Abbildung $p\colon L|_U \to U$. Zeige, dass $L|_U$ das triviale Geradenbündel ist. Ist

$$p\colon L \longrightarrow \mathbb{A}_K^2$$

ein Geradenbündel?



Aufgabe 19.7.*

Es sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Wir betrachten den kommutativen Ring

$$S = K[X,Y]/\left(X^2 + Y^2 - 1\right)$$

und die S-Algebra

$$B = K[X,Y,Z,W]/\left(X^2 + Y^2 - 1, (1-X)Z - YW, YZ - (1+X)W\right)$$

$$= \; S[Z,W]/\left((1-X)Z - YW, YZ - (1+X)W\right).$$

Es sei $U = K-\text{Spek}\,(S)$ und $L = K-\text{Spek}\,(B)$ mit der zugehörigen Spektrumsabbildung

$$p\colon\; L = K-\text{Spek}\,(B) \longrightarrow U = K-\text{Spek}\,(S)\,.$$

(1) Zeige, dass $D(1-X)$ und $D(1+X)$ eine offene affine Überdeckung von U ist.

(2) Zeige

$$B_{1-X} \;\cong\; S_{1-X}[W]$$

und

$$B_{1+X} \;\cong\; S_{1+X}[Z]$$

(3) Zeige, dass L ein Geradenbündel über U ist.

Aufgabe 19.8.*

Wir betrachten die Situation aus Aufgabe 19.7 zu $K = \mathbb{R}$. Es sei

$$\varphi\colon\; [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}-\text{Spek}\,(S)\,,\, t \longmapsto (\cos t\,,\ \sin t\,)\,,$$

die trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises. Zeige, dass das Bild von

$$\psi\colon\; [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^4,\, t \longmapsto \left(\cos t\,,\ \sin t\,,\ \cos \frac{1}{2}t\,,\ \sin \frac{1}{2}t\right),$$

in $\mathbb{R}-\text{Spek}\,(B)$ landet, dass $\varphi = p \circ \psi$ gilt, und dass das Bild von ψ niemals den Nullschnitt trifft.

Aufgabe 19.9. Wir betrachten die Situation aus Aufgabe 19.7 zu $K = \mathbb{R}$. Zeige, dass L ohne den Nullschnitt, aufgefasst mit der metrischen Topologie, zusammenhängend ist. Folgere, dass dieses Geradenbündel nicht trivial ist.

Aufgabe 19.10. Es sei

$$U \;=\; D(X,Y) \;=\; \mathbb{A}^2_K \setminus \{(0,0)\} \;\subseteq\; \mathbb{A}^2_K$$

und

$$L \;=\; V(XU + YV - 1) \;\subseteq\; \mathbb{A}^4_K$$

zusammen mit der natürlichen Abbildung $p\colon\; L \to U$. Zeige, dass diese Abbildung die Eigenschaft aus Aufgabe 19.3 erfüllt, aber nicht die Eigenschaft aus Aufgabe 19.4.

Aufgabe 19.11.*

Es sei K ein Körper. Zeige, dass in $K[X,Y,Z,W]$ die drei Ideale

$$\mathfrak{a} = \left(Z^2+W^2-1,\, X-2Z^2+1,\, Y-2ZW\right),$$

$$\mathfrak{b} = \left(Z^2+W^2-1,\, X^2+Y^2-1,\, (1-X)Z-YW,\, YZ-(1+X)W\right)$$

und

$$\mathfrak{c} = \left(Z^2+W^2-1,\, (1-X)Z-YW,\, YZ-(1+X)W\right)$$

übereinstimmen.

Aufgabe 19.12.*

Zeige, dass durch

$$\varphi\colon V(Z^2+W^2-1) \longrightarrow V(X^2+Y^2-1),\, (Z,W) \longmapsto (Z^2-W^2, 2ZW) = (X,Y).$$

ein Morphismus des Einheitskreises in sich gegeben ist. Zeige, dass das Urbild zu jedem Punkt $P \in V(X^2+Y^2-1)$ aus zwei Punkten besteht.

Aufgabe 19.13. Es sei

$$S^1 = V(X^2+Y^2-1)$$

der reelle Einheitskreis. Zeige, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ die Abbildung

$$S^1 \longrightarrow S^1,\, (\cos t,\, \sin t) \longmapsto (\cos nt,\, \sin nt),$$

ein algebraischer Morphismus ist.

Tipp: Betrachte die Abbildung auf dem komplexen Einheitskreis.

Aufgabe 19.14. Sei $R \subseteq S$ eine ganze Erweiterung von Integritätsbereichen und sei $F \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass dann auch die zugehörige Erweiterung $R_F \subseteq S_F$ ganz ist.

Aufgabe 19.15.*

Seien R und S Integritätsbereiche und sei $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung. Es sei $f \in R$ ein Element, das in S eine Einheit ist. Zeige, dass f dann schon in R eine Einheit ist.

Aufgabe 19.16. Sei $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung und sei $f \in R$. Zeige: Wenn f, aufgefasst in S, eine Einheit ist, dann ist f eine Einheit in R.

Aufgabe 19.17. Man gebe ein Beispiel einer ganzen Ringerweiterung $R \subseteq S$, wo es einen Nichtnullteiler $f \in R$ gibt, der ein Nullteiler in S wird.

Aufgabe 19.18. Es sei

$$P = X^2 - 3X + 7$$

und

$$Q = Y^3 - Y^2 + 4Y - 5.$$

Begründe, dass die Ringerweiterung

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[X,Y]/(P,Q)$$

ganz ist und finde eine Ganzheitsgleichung für $x+y$ und für xy (kleine Buchstaben bezeichnen die Restklassen der Variablen).

Aufgabe 19.19. Es sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung zwischen endlichen kommutativen Ringen R und S. Zeige, dass eine ganze Ringerweiterung vorliegt.

Aufgabe 19.20. Es sei R ein kommutativer Ring und

$$S = R[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$$

eine (als Algebra) endlich erzeugte R-Algebra, die ganz über R sei. Zeige, dass S ein endlich erzeugter R-Modul ist.

Aufgabe 19.21. Es sei

$$\varphi\colon R \longrightarrow S$$

ein ganzer Ringhomomorphismus zwischen kommutativen Ringen und $R \to R'$ ein weiterer Ringhomomorphismus. Zeige, dass auch

$$\varphi'\colon R' \longrightarrow R' \otimes_R S,\ f \longmapsto f \otimes 1,$$

ganz ist.

Aufgabe 19.22.
(1) Es sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass R ganz-abgeschlossen im Polynomring $R[X]$ ist.
(2) Man gebe ein Beispiel für einen kommutativen Ring R, der im Polynomring nicht ganz-abgeschossen ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 19.23. (4 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{N}$ das durch $3,5,7$ erzeugte numerische Untermonoid. Bestimme eine Restklassendarstellung des zugehörigen Monoidringes.

Aufgabe 19.24. (3 Punkte)

Seien R, S, T kommutative Ringe und seien $\varphi : R \to S$ und $\psi : S \to T$ Ringhomomorphismen derart, dass S ganz über R und T ganz über S ist. Zeige, dass dann auch T ganz über R ist.

(Vergleiche Aufgabe 10.26).