Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 18

Übungsaufgaben

Aufgabe 18.1. Ein Geldfälscher stellt 3- und 7-Euro-Scheine her.

(1) Zeige, dass es nur endlich viele Beträge gibt, die er nicht (exakt) begleichen kann. Was ist der höchste Betrag, den er nicht begleichen kann?
(2) Was ist der kleinste Betrag, den er auf zwei verschiedene Weisen begleichen kann?
(3) Beschreibe die Menge M der vollen Eurobeträge, die er mit seinen Scheinen begleichen kann.

Aufgabe 18.2. Ein Geldfälscher stellt 4-, 9- und 11-Euro-Scheine her.

(1) Zeige, dass es nur endlich viele Beträge gibt, die er nicht (exakt) begleichen kann. Was ist der höchste Betrag, den er nicht begleichen kann?
(2) Was ist der kleinste Betrag, den er auf zwei verschiedene Weisen begleichen kann?
(3) Beschreibe explizit die Menge M der vollen Eurobeträge, die er mit seinen Scheinen begleichen kann.

Aufgabe 18.3.*

Ein Geldfälscher stellt 7-, 11-, 13- und 37-Euro-Scheine her. Wie viele volle Eurobeträge kann er mit seinen Scheinen nicht bezahlen, und was ist der größte Betrag, den er nicht begleichen kann? Bestimme die Multiplizität und die Einbettungsdimension des zugehörigen numerischen Monoids.

Aufgabe 18.4.*

Bestimme für das numerische Monoid $M \subseteq \mathbb{N}$, das durch $4, 7$ und 17 erzeugt wird, die Einbettungsdimension, die Multiplizität, die Führungszahl und den Singularitätsgrad.

Aufgabe 18.5. Bestimme für das numerische Monoid M, das durch $5, 7$ und 9 erzeugt wird, die Einbettungsdimension, die Multiplizität, die Führungszahl und den Singularitätsgrad.

Aufgabe 18.6. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid, das von teilerfremden natürlichen Zahlen erzeugt sei. Zeige, dass die Einbettungsdimension maximal gleich der Multiplizität ist.

Aufgabe 18.7. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein durch teilerfremde Zahlen erzeugtes numerisches Monoid, bei dem die Einbettungsdimension gleich der Multiplizität ist. Zeige, dass dann der maximale Erzeuger aus einem minimalen Erzeugendensystem größer oder gleich der Führungszahl ist.

Aufgabe 18.8. Man gebe ein Beispiel eines numerischen Monoids M mit Multiplizität 3 und Einbettungsdimension 3 an, bei dem die Führungszahl prim ist und nicht zum minimalen Erzeugendensystem gehört.

Aufgabe 18.9. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid, das von teilerfremden Elementen erzeugt werde. Es sei vorausgesetzt, dass die Multiplizität von M mit der Führungszahl von M übereinstimmt. Bestimme ein minimales Erzeugendensystem und die Einbettungsdimension von M.

Aufgabe 18.10.*

Wir betrachten die Neilsche Parabel

$$C = V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$$

und den Punkt

$$P = (1,1) \in C.$$

Zeige, dass man das maximale Ideal zu P, also das Ideal $(X-1, Y-1)$ im Koordinatenring $R = \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^3)$, nicht als Radikal zu einem einzigen Element $f \in R$ beschreiben kann.

Die vorstehende Aufgabe zeigt, dass jede Kurve D, die die Neilsche Parabel im Punkt $(1,1)$ trifft, sie noch in mindestens einem weiteren Punkt trifft. Dies verallgemeinert auch Aufgabe 1.10.

Aufgabe 18.11. Sei M ein numerisches Monoid. Bestimme die Filter in M.

Aufgabe 18.12. Es sei M ein numerisches Monoid und K ein Körper. Zeige, dass es ein $f \in K[M]$ derart gibt, dass $K[M]_f = K[X]_X$ gilt.

Aufgabe 18.13. Es sei M ein numerisches Monoid, K ein Körper und $K[M]$ der zugehörige Monoidring. Zeige, dass $K[M] \cong K[\mathbb{N}]$ genau dann gilt, wenn $M = \mathbb{N}$ ist.

Aufgabe 18.14.*

Man gebe ein Beispiel für einen injektiven Monoidhomomorphismus $M \to N$ zwischen kommutativen Monoiden derart an, dass die zugehörige Spektrumsabbildung nicht surjektiv ist.

Aufgabe 18.15. Es sei M ein kommutatives Monoid und sei K ein Körper.

(1) Zeige, dass durch die Diagonalabbildung
$$\triangle\colon M \longrightarrow M \times M,\, m \longmapsto (m,m),$$
ein Monoidhomomorphismus gegeben ist.

(2) Beschreibe den zugehörigen K-Algebrahomomorphismus
$$K[M] \longrightarrow K[M \times M] \cong K[M] \otimes K[M].$$

(3) Beschreibe die zugehörige Spektrumsabbildung
$$K-\text{Spek}\,(K[M]) \times K-\text{Spek}\,(K[M]) \longrightarrow K-\text{Spek}\,(K[M])\,.$$
Zeige insbesondere, dass dadurch $K-\text{Spek}\,(K[M])$ selbst zu einem kommutativen Monoid wird.

Aufgabe 18.16. Spezialisiere Aufgabe 18.15 auf die Monoide
$$M = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^r, \mathbb{Z}^r.$$

Aufgabe 18.17. Es sei M ein kommutatives Monoid, K ein Körper und $P \in K-\text{Spek}\,(M)$ ein fixierter Punkt.

(1) Zeige, dass es eine stetige Abbildung
$$\Psi_P\colon K-\text{Spek}\,(M) \longrightarrow K-\text{Spek}\,(M)\,,\, Q \longmapsto Q \cdot P,$$
gibt.

(2) Beschreibe den zugehörigen K-Algebrahomomorphismus $K[M] \to K[M]$.

(3) Charakterisiere, für welche P diese Abbildung bijektiv ist.

Aufgabe 18.18. Es seien M und N kommutative Monoide, sei $\varphi\colon M \to N$ ein Monoidhomomorphismus und sei K ein Körper. Zeige, dass die Spektrumsabbildung
$$\varphi^*\colon K-\text{Spek}\,(N) \longrightarrow K-\text{Spek}\,(M)$$
ebenfalls ein Monoidhomomorphismus ist.

Aufgabe 18.19. Seien $a, b, c, d, r, s \geq 1$ natürliche Zahlen. Wir betrachten die stetig differenzierbare Kurve

$$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t^r, t^s).$$

Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x,y) = (x^a y^b, x^c y^d)\,.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 18.20. (6 Punkte)

Es sei M ein numerisches Monoid, das durch zwei teilerfremde Elemente $d > e$ erzeugt werde. Bestimme die Einbettungsdimension, die Multiplizität, die Führungszahl und den Singularitätsgrad von M.

Aufgabe 18.21. (3 Punkte)

Bestimme für das numerische Monoid M, das durch $3, 7, 9$ und 11 erzeugt wird, die Einbettungsdimension, die Multiplizität, die Führungszahl und den Singularitätsgrad.

Aufgabe 18.22. (4 Punkte)

Klassifiziere sämtliche numerische Monoide M (mit teilerfremden Erzeugern) mit Führungszahl $f(M) \leq 6$. Man gebe jeweils die Einbettungsdimension, die Multiplizität und den Singularitätsgrad an.

Aufgabe 18.23. (3 Punkte)

Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid und K ein Körper. Definiere

$$M_+ = M \cap \mathbb{N}_+ \text{ und } nM_+ = \\ \{m \in M \,|\, \text{es gibt eine Darstellung } m = m_1 + \ldots + m_n \text{ mit } m_i \in M_+\}\,.$$

Zeige, dass nM_+ „Ideale“ in M sind, dass zu M_+ ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ in $K[M]$ gehört, und dass das zu nM_+ gehörige Ideal gleich $\mathfrak{m}^n$ ist.

Aufgabe 18.24. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien M, N numerische Monoide mit $M \subseteq N$. Zeige, dass die zugehörige Spektrumsabbildung surjektiv ist.

Es ist dabei hilfreich, Satz 18.10 zu verwenden.

Aufgabe 18.25. (3 Punkte)

Seien M, N numerische Monoide. Für welche der numerischen Invarianten ν (Multiplizität, Führungszahl, Singularitätsgrad, Einbettungsdimension) folgt aus $M \subseteq N$ die Abschätzung $\nu(M) \geq \nu(N)$?

(Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 18.26. (3 Punkte)

Sei M ein numerisches Monoid, das nicht isomorph zu $\mathbb{N}$ sei, und sei K ein Körper. Zeige, dass es im Monoidring $K[M]$ irreduzible Elemente gibt, die nicht prim sind. Man gebe Elemente aus $K[M]$ mit zwei wesentlich verschiedenen Zerlegungen in irreduzible Elemente an.