Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 17

Übungsaufgaben

Aufgabe 17.1. Seien $M \subseteq N$ kommutative Monoide. Zeige, dass durch

$$\tilde{M} = \{n \in N \,|\, \text{es gibt } k \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } kn \in M\}$$

ein Untermonoid von N gegeben ist, das M umfasst.

Aufgabe 17.2. Berechne

$$\left(4T^{(-1,3)} - 6T^{(-2,5)} + 5T^{(0,-2)} + 3T^{(-1,1)}\right) \cdot \left(-7T^{(1,0)} + 8T^{(4,5)} - 4T^{(-3,5)} + 6T^{(3,-1)}\right)$$

im Monoidring $K[\mathbb{Z}^2]$.

Aufgabe 17.3. Berechne

$$\left(4T^0 - 9T^1 + 9T^2 + 7T^3 - 4T^4\right) \cdot \left(4T^0 - T^1 + 5T^2 + 7T^3 - T^4\right)$$

im Monoidring $K[\mathbb{Z}/(5)]$.

Aufgabe 17.4. Zeige, dass die Multiplikation auf einem Monoidring zu einem kommutativen Monoid das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz erfüllt.

Aufgabe 17.5. Sei K ein Körper. Finde ein kommutatives Monoid M derart, dass eine Isomorphie

$$K[M] \cong K[X,Y,U,V]/(UX - VY)$$

vorliegt.

Aufgabe 17.6. Es sei M ein kommutatives Monoid und es sei $e \in M$ ein Element mit $2e = e$. Es sei K ein Körper und es sei $K[M]$ der zugehörige Monoidring. Zeige, dass T^e ein idempotentes Element in $K[M]$ ist.

Aufgabe 17.7. Es sei G eine endliche Gruppe $G \neq 0$. Zeige, dass der Monoidring $\mathbb{C}[G]$ nicht zusammenhängend ist, obwohl es in der Gruppe außer 0 kein Element e gibt, das die Gleichung $2e = e$ erfüllt.

Aufgabe 17.8. Man gebe ein Beispiel eines Untermonoids $M \subseteq \mathbb{N}^2$, das nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 17.9. Zeige, dass man den Koordinatenring zum Standardkegel $V(Z^2 - X^2 - Y^2)$ über $\mathbb{C}$ als einen Monoidring realisieren kann.

Die invertierbaren Elemente in einem Monoid nennt man auch Einheiten des Monoids. Sie bilden die Einheitengruppe des Monoids.

Aufgabe 17.10.*

Sei M ein kommutatives Monoid und K ein Körper. Es sei $m \in M$ und $T^m \in K[M]$. Zeige, dass m genau dann eine Einheit in M ist, wenn T^m eine Einheit in $K[M]$ ist.

Aufgabe 17.11. Zeige, dass die Differenzengruppe zu einem kommutativen Monoid in der Tat eine Gruppe ist.

Aufgabe 17.12. Sei M ein kommutatives Monoid. Zeige, dass die zugehörige Differenzengruppe $\Gamma = \Gamma(M)$ eine kommutative Gruppe ist, und dass sie folgende universelle Eigenschaft besitzt: Zu jedem Monoidhomomorphismus $\varphi\colon\ M \to G$ in eine Gruppe G gibt es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varphi}\colon\ \Gamma \to G$, der φ fortsetzt.

Aufgabe 17.13. Sei M ein kommutatives Monoid mit zugehöriger Differenzengruppe $\Gamma = \Gamma(M)$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) M ist ein Monoid mit Kürzungsregel.
(2) Die kanonische Abbildung $M \to \Gamma(M)$ ist injektiv.
(3) M lässt sich als Untermonoid einer Gruppe realisieren.

Aufgabe 17.14. Sei M ein kommutatives Monoid und R ein kommutativer Ring. Charakterisiere, für welche Teilmengen $I \subseteq M$ die Teilmenge

$$R[I] = \bigoplus_{m \in I} T^m \subseteq R[M]$$

ein Ideal in $R[M]$ ist.

Aufgabe 17.15. Betrachte den Monoidhomomorphismus

$$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{Z},\ e_1 \longmapsto 1,\ e_2 \longmapsto -1\,.$$

Beschreibe die zugehörige Abbildung zwischen den Monoidringen (für einen Körper K) und den zugehörigen K-Spektren.

Aufgabe 17.16. Wir betrachten die kommutativen Monoide $M = \mathbb{N}^r$ und $N = \mathbb{N}^s$. Zeige, dass ein Monoidhomomorphismus von M nach N eindeutig durch eine Matrix (mit r Spalten und s Zeilen) mit Einträgen aus $\mathbb{N}$ bestimmt ist.

Wie sieht die zugehörige Spektrumsabbildung aus?

Aufgabe 17.17. Es sei M eine quadratische $r \times r$-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{N}$ mit der zugehörigen Monoidabbildung und der zugehörigen Spektrumsabbildung $\varphi\colon\ K-\text{Spek}\ (K[\mathbb{N}^r]) \to K-\text{Spek}\ (K[\mathbb{N}^r])$, wobei K ein unendlicher Körper sei. Zeige, dass genau dann $\det(M) \neq 0$ ist, wenn φ surjektiv auf eine offene Menge aus $K-\text{Spek}\ (K[\mathbb{N}^r])$ abbildet.

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Definition.

Ein *Filter* F in einem kommutativen Monoid M ist ein Untermonoid, das zusätzlich *teilerstabil* ist. D.h. falls $f \in F$ ist und $g|f$ gilt, so ist auch $g \in F$.

AUFGABE 17.18. Sei M ein kommutatives Monoid. Zeige, dass es in M einen kleinsten Filter gibt und dass dieser eine Gruppe bildet.

AUFGABE 17.19. Sei R ein kommutativer Ring. Beweise die R-Algebraisomorphie

$$R[\mathbb{Z}^n] \cong R[X_1, \ldots, X_n]_{X_1 \cdots X_n}$$

mit Hilfe der universellen Eigenschaften von Monoidringen und Nenneraufnahmen.

AUFGABE 17.20. Sei M ein kommutatives Monoid und sei $f \in M$. Wir betrachten die Menge

$$M_f = \{m - nf | \, m \in M, \, n \in \mathbb{N}\} \, / \sim,$$

wobei die Relation

$$m - nf \sim m' - n'f$$

genau dann gilt, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass

$$m + n'f + kf = m' + nf + kf$$

in M gilt.

(1) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
(2) Definiere auf M_f eine Monoidstruktur.
(3) Es sei R ein kommutativer Ring und sei $T^f \in R[M]$ das Monom zu f im Monoidring. Zeige

$$R[M_f] \cong R[M]_{T^f}.$$

AUFGABE 17.21. Seien M, N endlich erzeugte kommutative Monoide mit den K-Spektren $K-\text{Spek}\,(K[M]) = \text{Mor}_{\text{mon}}\,(M, K)$ und $K-\text{Spek}\,(K[N]) = \text{Mor}_{\text{mon}}\,(N, K)$. Zeige, dass man für einen Monoidhomomorphismus $\varphi : M \to N$ die zugehörige Spektrumsabbildung auf zwei verschiedene Weisen definieren kann, die aber inhaltlich übereinstimmen.

AUFGABE 17.22. Wir betrachten das kommutative Monoid M, das durch die drei Erzeuger e, f, g und die einzige Relation $e + f = 5g$ gegeben ist. Bestimme das K-Spektrum zu M für verschiedene Körper K.

AUFGABE 17.23. Es sei M ein endliches kommutatives Monoid. Zeige, dass das K-Spektrum zu M auch endlich ist.

AUFGABE 17.24. Berechne in $R = \mathbb{R}[\mathbb{Q}_{\geq 0}]$ das Produkt

$$\left(X^2 + 4X^{3/2} - 5X + X^{1/2}\right) \left(2X^{3/2} + 4X - 7X^{1/2}\right) .$$

Aufgabe 17.25. Zeige, dass man jedes Element $F \in R = K[\mathbb{Q}_{\geq 0}]$ (K ein Körper) als ein Polynom in $X^{1/b}$ mit einem $b \in \mathbb{N}_+$ schreiben kann, dass es also ein $P \in K[Y]$ derart gibt, dass $F = P(X^{1/b})$ gilt. Welches Polynom kann man bei

$$F = X^{1/2} + X^{1/3} + X^{1/5}$$

nehmen?

Aufgabe 17.26. Zeige, dass in $R = K[\mathbb{Q}_{\geq 0}]$ das Element X keine Zerlegung in irreduzible Elemente besitzt.

Aufgabe 17.27. Zeige, dass in $R = \mathbb{R}[\mathbb{Q}_{\geq 0}]$ das Element $X^2 + 1$ nicht irreduzibel ist.

Aufgabe 17.28. Zeige, dass es in $R = \mathbb{C}[\mathbb{Q}_{\geq 0}]$ keine irreduziblen Elemente gibt.

Aufgabe 17.29.*

Bestimme sämtliche Teiler von X im Ring $R = K[\mathbb{Q}_{\geq 0}]$, wobei K ein Körper ist.

Aufgabe 17.30.*

Bestimme die Einheiten im Ring $R = K[\mathbb{Q}]$, wobei K ein Körper ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.31. (6 Punkte)

Seien $M \subseteq N$ endlich erzeugte kommutative Monoide. Zeige, dass für einen Körper K der Ringhomomorphismus $K[M] \subseteq K[N]$ genau dann endlich ist, wenn es zu jedem $n \in N$ ein $k \in \mathbb{N}_+$ mit $kn \in M$ gibt.

Aufgabe 17.32. (4 Punkte)

Sei $M = (\mathbb{Q}, +)$ die additive Gruppe der rationalen Zahlen. Bestimme $\mathbb{Q}-$ Spek $(\mathbb{Q}[M])$. Wie sieht es aus, wenn man $\mathbb{Q}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt?

Aufgabe 17.33. (4 Punkte)

Es sei $\varphi\colon\ M \to N$ ein Homomorphismus von kommutativen Monoiden. Zeige, dass die Menge aller Punkte aus $K - \operatorname{Spec} K[N]$, die unter der Spektrumsabbildung auf den Einspunkt $1 \in K - \operatorname{Spek}(K[M])$ (das ist der Punkt, der der konstanten Abbildung $M \mapsto 1$ entspricht) abgebildet werden, selbst die Struktur eines K-Spektrums eines geeigneten Monoids besitzt.

Aufgabe 17.34. (4 Punkte)

Wir betrachten Monoide der Form $M = (\mathbb{Z}/(m), +)$. Beschreibe $K -$ Spek $(K[M])$ allgemein sowie für die Körper $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/(5)$. Finde die idempotenten Elemente von $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/(3)]$.

Aufgabe 17.35. (4 Punkte)

Sei M ein kommutatives Monoid. Definiere eine Bijektion zwischen den folgenden Objekten.

(1) Filter in M.
(2) $\operatorname{Mor}_{\text{mon}}(M, (\{0,1\}, 1, \cdot))$.
(3) $\mathbb{F}_2 - \operatorname{Spek}(M)$
(4) $\{\varphi \in K - \operatorname{Spek}\,(K[M]) \mid \varphi(M) \subseteq \{0,1\}\}$. (Dabei ist K ein Körper.)

Aufgabe 17.36. (3 Punkte)

Seien M und N kommutative Monoide und sei K ein Körper. In welcher Beziehung steht K–Spek $(K[M \times N])$ zu K!–Spek $(K[M])$ und K–Spek $(K[N])$?

Aufgabe 17.37. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und G eine Gruppe. Dann können wir den Monoidring $K[G]$ betrachten. Sei nun weiter M ein $K[G]$-Modul. Zeige, dass

(1) M nichts anderes ist als ein K-Vektorraum V zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \operatorname{Aut}_K(V)$.
(2) ein $K[G]$-Modulhomomorphismus $\varphi : M \to M$ eine K-lineare Abbildung ist, für die zusätzlich $\varphi \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \varphi$ für alle $g \in G$ gilt.

Bemerkung: ρ heißt dann eine *Darstellung* von G. Solche Darstellungen sind oft einfacher zu handhaben als G und man kann mit Hilfe von ρ oft hilfreiche Erkenntnisse über G selbst gewinnen.