Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 16

Übungsaufgaben

Aufgabe 16.1. Sei $X = K-\operatorname{Spek}(R)$ das K-Spektrum einer endlich erzeugten kommutativen K-Algebra. Zeige, dass ein irreduzibler Filter durch offene Mengen der Form $D(f)$ erzeugt wird.

Aufgabe 16.2. Sei $X = K-\operatorname{Spek}(R)$ eine affine Varietät und $Z \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Zeige, dass der Umgebungsfilter $U(Z)$ von offenen Mengen der Form $D(f)$ erzeugt wird.

Aufgabe 16.3. Sei X ein topologischer Raum. Zeige, dass ein Ultrafilter irreduzibel ist.

Aufgabe 16.4. Sei U eine quasiaffine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Zeige, dass die Einheiten in $\Gamma(U, \mathcal{O})$ den Morphismen von U nach $\mathbb{A}_K^{\times} = \mathbb{A}_K^1 \setminus \{0\}$ entsprechen.

Aufgabe 16.5. Sei U eine quasiaffine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K und sei

$$\psi\colon U \longrightarrow \mathbb{A}_K^n$$

ein Morphismus. Zeige, dass ψ genau dann durch die abgeschlossene Menge $V(\mathfrak{a}) = \subseteq$ faktorisiert, wenn $\mathfrak{a}$ im Kern des globalen Ringhomomorphismus

$$\tilde{\psi}\colon K[T_1, \ldots, T_n] \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O})$$

liegt.

Aufgabe 16.6. Seien U und V quasiaffine Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K und sei $W = U \uplus V$ ihre disjunkte Vereinigung. Zeige, dass für jede quasiaffine Varietät Z ein Morphismus von W nach Z einfach ein Paar bestehend aus einem Morphismus von U nach Z und einem Morphismus von V nach Z ist.

Aufgabe 16.7.*

Es sei $V = V(x^2+y^2-1) \subseteq \mathbb{A}_K^2$ der Einheitskreis über einem Körper K und es seien $P = (a,b)$ und $Q = (c,d)$ Punkte auf V. Zeige, dass es einen Automorphismus $\varphi\colon V \to V$ mit

$$\varphi(P) = Q$$

gibt.

Aufgabe 16.8. Es seien X und Z quasiaffine Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Zu jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ betrachten wir

$$\mathcal{F}(U) := \{\varphi : U \to Z \mid \varphi \text{ ist ein Morphismus}\}.$$

Zeige, dass dies eine Garbe auf X ist.

Aufgabe 16.9.*

Man beschreibe einen K-Algebrahomomorphismus derart, dass die induzierte Spektrumsabbildung der K-Spektren die Addition auf K beschreibt.

Aufgabe 16.10. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass die Addition, die Multiplikation, das Negative, das Inverse und die Division in K sich als Morphismen realisieren lassen.

Aufgabe 16.11. Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{a} = (f_1,\ldots,f_n)$ ein endlich erzeugtes Ideal. Es sei $f \in R$ ein weiteres Element. Dann nennt man die R-Algebra

$$A = R[T_1,\ldots,T_n]/(f_1T_1+\cdots+f_nT_n+f)$$

die *erzwingende Algebra* zu den $f_1,\ldots,f_n,f$. Zeige, dass A folgende Eigenschaft erfüllt: Zu jedem Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to S$ in einen kommutativen Ring S mit der Eigenschaft $\varphi(f) \in \mathfrak{a}S$ gibt es einen R-Algebrahomomorphismus $\vartheta\colon A \to S$. Zeige ebenso, dass dieser Homomorphismus *nicht* eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 16.12. Sei R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Es seien $f_1,\ldots,f_n,f$ Elemente in R und es sei

$$A = R[T_1,\ldots,T_n]/(f_1T_1+\cdots+f_nT_n+f)$$

die erzwingende Algebra zu diesen Daten. Charakterisiere die Fasern des zugehörigen Morphismus

$$K-\operatorname{Spek}(A) \longrightarrow K-\operatorname{Spek}(R).$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 16.13. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien R und S integre K-Algebren von endlichem Typ. Es sei $\varphi\colon\ R \to S$ ein K-Algebrahomomorphismus mit zugehörigem Morphismus $= \varphi^*\colon\ K-\text{Spek}\,(S) \to K-\text{Spek}\,(R)$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) φ ist injektiv.
(2) Das Bild von φ^* ist dicht in $K-\text{Spek}\,(R)$.
(3) φ induziert einen Ringhomomorphismus $Q(R) \to Q(S)$.

Aufgabe 16.14. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien R und S zwei integre K-Algebren von endlichem Typ. Es sei ein K-Algebrahomomorphismus

$$\varphi\colon\ Q(R) \longrightarrow Q(S)$$

zwischen den Quotientenkörpern gegeben. Zeige, dass es eine offene Teilmenge $U \subseteq K-\text{Spek}\,(S)$ und einen Morphismus

$$U \longrightarrow K-\text{Spek}\,(R)$$

gibt, der φ induziert.

Aufgabe 16.15. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von zwei affin-algebraischen Kurven C_1 und C_2 über $\mathbb{C}$ und einem Morphismus

$$\psi\colon\ C_1 \longrightarrow C_2,$$

der bijektiv ist, wo aber die Umkehrabbildung nicht stetig in der metrischen Topologie ist.

Aufgabe 16.16. (8 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von zwei affinen Varietäten V_1 und V_2 und einem Morphismus

$$\psi\colon\ V_1 \longrightarrow V_2,$$

der bijektiv ist, wo aber die Umkehrungabbildung nicht stetig (in der Zariski-Topologie) ist.

(und daher auch kein Morphismus)

Aufgabe 16.17. (3 Punkte)

Sei $U \subseteq K-\text{Spek}\,(R)$ eine quasiaffine Varietät und sei $f \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ eine algebraische Funktion. Es seien $q = g_i/h_i$, $i = 1, \ldots, n$, lokale Darstellungen von f auf $D(h_i) \subseteq U$. Zeige, dass das Urbild $f^{-1}(0)$ gleich der abgeschlossenen Menge $V(h_1g_1, \ldots, h_ng_n) \cap U$ ist.