Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 15

Übungsaufgaben

Aufgabe 15.1. Sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass R genau dann ein lokaler Ring ist, wenn $a + b$ nur dann eine Einheit ist, wenn a oder b eine Einheit ist.

Aufgabe 15.2. Sei R ein kommutativer Ring. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen.

(1) R hat genau ein maximales Ideal
(2) Die Menge der Nichteinheiten $R \setminus R^{\times}$ bildet ein Ideal in R.

Aufgabe 15.3. Sei R ein kommutativer lokaler Ring. Zeige, dass R zusammenhängend ist.

Aufgabe 15.4. Sei R ein lokaler Ring mit Restekörper K. Zeige, dass R und K genau dann die gleiche Charakteristik haben, wenn R einen Körper enthält.

Aufgabe 15.5.*

Sei R ein lokaler Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R. Zeige, dass

$$R^{\times} \longrightarrow (R/\mathfrak{a})^{\times}$$

surjektiv ist.

Aufgabe 15.6. Bestimme die Unterringe der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, die lokal sind.

Aufgabe 15.7. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $R = K[X_1, \ldots, X_n]$. Zeige, dass sämtliche Lokalisierungen von R an maximalen Idealen zueinander isomorph sind.

Aufgabe 15.8. Sei K ein Körper und betrachte das Achsenkreuz

$$V = K-\text{Spek}\,(K[X,Y]/(XY))\,.$$

Bestimme für jeden Punkt $P \in V$, ob der lokale Ring an P ein Integritätsbereich ist oder nicht.

Aufgabe 15.9. Wir betrachten die Neilsche Parabel

$$C = V(X^2 - Y^3) \subseteq \mathbb{A}_K^2$$

über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Zeige, dass sämtliche Lokalisierungen von C an Punkten $P \neq (0,0)$ zueinander isomorph sind, aber nicht zur Lokalisierung im Nullpunkt.

Aufgabe 15.10. Es sei R die Lokalisierung im Nullpunkt der Kurve

$$C = V(Y^2 - X^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}_K^2$$

und es sei S die Lokalisierung des Achsenkreuzes im Nullpunkt. Sind diese beiden lokalen Ringe isomorph?

Aufgabe 15.11. Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Zeige, dass $\mathfrak{p}$ genau dann ein minimales Primideal ist, wenn die Reduktion der Lokalisierung $R_\mathfrak{p}$ ein Körper ist.

Aufgabe 15.12. Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal mit Lokalisierung $R_\mathfrak{m}$. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal, dass unter der Lokalisierungsabbildung zum Kern gehört. Zeige, dass dann $R_\mathfrak{m}$ auch eine Lokalisierung von $R/\mathfrak{a}$ ist.

Aufgabe 15.13. Es sei K ein Körper und R eine endlich erzeugte K-Algebra. Es sei $S = R_\mathfrak{m}$ die Lokalisierung von R an einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Zeige, dass der Restekörper von S endlich über K ist.

Aufgabe 15.14. Es sei R ein kommutativer Ring. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen.

(1) R ist reduziert.
(2) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ ist $R_\mathfrak{p}$ reduziert.
(3) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist $R_\mathfrak{m}$ reduziert.

Bemerkung: Man sagt daher, dass die Reduziertheit eine lokale Eigenschaft ist.

Man gebe auch ein Beispiel für einen kommutativen Ring, der nicht integer ist, dessen Lokalisierungen an Primidealen aber alle integer sind.

Aufgabe 15.15. Sei R ein kommutativer Ring, sei $f \in R$ und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal. Zeige, dass $f \in \mathfrak{a}$ genau dann gilt, wenn für alle Lokalisierungen $R_\mathfrak{p}$ gilt, dass $f \in \mathfrak{a}R_\mathfrak{p}$ ist.

Aufgabe 15.16. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und R eine endlich erzeugte kommutative K-Algebra. Es seien F_1 und F_2 zwei topologische Filter in $K-\text{Spek}\,(R)$ mit $F_1 \subseteq F_2$. Zeige, dass es einen Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}_{F_1} \longrightarrow \mathcal{O}_{F_2}$$

gibt.

Aufgabe 15.17. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und R eine endlich erzeugte kommutative K-Algebra. Sei $P \in K-\text{Spek}\,(R)$ ein Punkt. Zeige (ohne Satz 15.12 zu verwenden), dass der Halm $\mathcal{O}_P$ ein lokaler Ring ist.

Aufgabe 15.18.*

Sei K ein Körper und R eine integre, endlich erzeugte K-Algebra mit Quotientenkörper $Q(R)$. Sei $q \in Q(R)$. Zeige, dass die Menge

$$\{P \in K-\text{Spek}\,(R) \,|\, q \in \mathcal{O}_P\}$$

offen in $K-\text{Spek}\,(R)$ ist (dabei bezeichnet $\mathcal{O}_P$ den lokalen Ring im Punkt P).

Aufgabe 15.19.*

Sei K ein Körper und seien R und S integre, endlich erzeugte K-Algebren. Es sei

$$\varphi\colon\, R \longrightarrow S$$

ein K-Algebrahomomorphismus und $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal in S mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$. Die Abbildung induziere einen Isomorphismus $R_{\mathfrak{m}} \to S_{\mathfrak{n}}$. Zeige, dass es dann auch ein $f \in R$, $f \notin \mathfrak{m}$, gibt derart, dass $R_f \to S_{\varphi(f)}$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 15.20. Sei I eine gerichtete Indexmenge und sei G_i, $i \in I$, ein gerichtetes System von kommutativen Gruppen. Zeige, dass der Kolimes eine kommutative Gruppe ist.

Aufgabe 15.21. Sei I eine gerichtete Indexmenge und sei M_i, $i \in I$, ein gerichtetes System von Mengen. Es sei N eine weitere Menge und zu jedem $i \in I$ sei eine Abbildung

$$\psi_i\colon\, M_i \longrightarrow N$$

mit der Eigenschaft gegeben, dass $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$ ist für alle $i \preccurlyeq j$ (wobei φ_{ij} die Abbildungen des Systems bezeichnen). Beweise die universelle Eigenschaft des Kolimes, nämlich, dass es eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\psi\colon\, \text{colim}_{\,i \in I} M_i \longrightarrow N$$

derart gibt, dass $\psi_i = \psi \circ j_i$ ist, wobei $j_i : M_i \to \text{colim}\ _{i \in I} M_i$ die natürlichen Abbildungen sind.

Zeige ferner, dass falls M_i eine gerichtetes System von Gruppen und falls N ebenfalls eine Gruppe ist und alle ψ_i Gruppenhomomorphismen sind, dass dann auch ψ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 15.22. (5 Punkte)

Beschreibe die Menge M aller 2×3-Matrizen mit Rang ≤ 1 über einem Körper K als K-Spektrum einer geeigneten K-Algebra. Zeige, dass es eine Isomorphie zwischen einer (nicht leeren) Zariski-offenen Teilmenge von M und einer offenen Menge des $\mathbb{A}_K^4$ gibt.

Aufgabe 15.23. (6 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Dann ist der Restklassenring $S = R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper $Q = Q(S)$ und $R_\mathfrak{p}$ ist ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. Zeige, dass eine natürliche Isomorphie

$$Q(S) \cong R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$$

vorliegt.

(Man nennt diesen Körper auch den *Restekörper* zu $\mathfrak{p}$).

Aufgabe 15.24. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei R eine K-Algebra von endlichem Typ. Es seien $P_1, \ldots, P_n$ endlich viele Punkte in $X = K-\text{Spek}\,(R)$. Zeige, dass der Umgebungsfilter dieser Punkte durch offene Mengen der Form $D(f)$ erzeugt wird.

D.h. es ist zu zeigen, dass es zu $P_1, \ldots, P_n \in U$ offen stets ein $F \in R$ gibt mit $P_1, \ldots, P_n \in D(F) \subseteq U$

Aufgabe 15.25. (5 Punkte)

Sei K ein Körper, sei R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ und sei S ein multiplikatives System in R. Zu S definieren wir

$$F(S) = \{U \subseteq K - \text{Spek}\,(R) \text{ offen} |\text{ es gibt } f \in S \text{ mit } D(f) \subseteq U\}.$$

Zeige, dass $F = F(S)$ ein topologischer Filter ist. Zeige ferner, dass es einen Ringhomomorphismus

$$R_S \longrightarrow \mathcal{O}_F$$

gibt, der eine Isomorphie ist, falls K algebraisch abgeschlossen und R reduziert ist.

Aufgabe 15.26. (5 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und betrachte die affine Ebene $\mathbb{A}_K^2$ zusammen mit der x-Achse

$$V = V(y).$$

Zeige, dass die folgende Menge ein saturiertes multiplikatives System ist.

$S = \left\{ f \in K[X,Y] | \text{ In der homogenen Komponente } f_{\deg(f)} \text{ kommt } x^{\deg(f)} \text{ vor} \right\}$.

Skizziere die Nullstellenmenge von einigen Polynomen, die oder die nicht zu S gehören.

Sei F der zugehörige topologische Filter. Vergleiche F mit dem Umgebungsfilter zu V und dem generischen Filter zu V.

Aufgabe 15.27. (4 Punkte)

Sei $X = K-\text{Spek}\,(R)$ eine affine Varietät und seien $P_1, \ldots, P_n \in X$ endlich viele Punkte. Es sei F der Umgebungsfilter dieser Punkte und $\mathcal{O}_F$ der zugehörige Halm. Zeige, dass $\mathcal{O}_F$ genau dann ein lokaler Ring ist, wenn $n = 1$ ist.

Aufgabe 15.28. (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Auf S betrachten wir folgende (partielle) Ordnung, und zwar sagen wir $f \preccurlyeq g$, falls f eine Potenz von g teilt. Zeige, dass die kommutativen Ringe

$$R_f,\, f \in S\,,$$

ein gerichtetes System bilden, und dass für den Kolimes

$$\operatorname{colim}_{f \in S} R_f = R_S$$

gilt.