**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2017/2018**

# Algebraische Kurven

## Arbeitsblatt 14

### Übungsaufgaben

Aufgabe 14.1. Es sei $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $R = K[X]$ der Polynomring über $K$. Zeige, dass jede algebraische Funktion $f$ auf einer offenen Menge

$$U = D(F) \subseteq K-\text{Spek}\,(R) = \mathbb{A}^1_K$$

die Form $f = G/H$ mit nicht kürzbaren $G, H \in R$ und mit $D(F) \subseteq D(H)$ besitzt.

Aufgabe 14.2. Es sei $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $R$ eine $K$-Algebra von endlichem Typ, die ein faktorieller Integritätsbereich sei. Zeige, dass jede algebraische Funktion $f$ auf einer offenen Menge

$$U \subseteq K-\text{Spek}\,(R)$$

die Form $f = G/H$ mit nicht kürzbaren $G, H \in R$ und mit $U \subseteq D(H)$ besitzt.

Aufgabe 14.3. Ergänze den Beweis zu Lemma 14.4.

Aufgabe 14.4. Zeige, dass der Ring $\Gamma(U, \mathcal{O})$ reduziert ist.

Aufgabe 14.5. Es sei $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wir betrachten den Punkt

$$P = (0,1) = V(X^3 - Y^3 + 1) = C \subseteq \mathbb{A}^2_K.$$

Es sei $U := C \setminus \{P\}$. Beschreibe eine algebraische Funktion auf $U$, die sich nicht zu einer algebraischen Funktion auf ganz $C$ ausdehnen lässt.

Aufgabe 14.6.*

Wir betrachten die Neilsche Parabel

$$C = V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2_K$$

und den Punkt

$$P = (1,1) \in C.$$

Finde eine algebraische Funktion, die auf $C \setminus \{P\}$ definiert ist, aber nicht auf ganz $C$. Tipp: Finde unterschiedliche Faktorzerlegungen von $X^3 - X^2$.

Aufgabe 14.7. Es sei $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $R$ eine $K$-Algebra von endlichem Typ, die ein Integritätsbereich sei. Es sei $U = D(\mathfrak{a}) \subseteq K-\text{Spek}\,(R)$ eine offene Menge zu einem Ideal $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_n)$. Zeige, dass für den Ring der algebraischen Funktionen die Gleichheit

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) = \bigcap_{i=1}^{n} R_{f_i}$$

gilt, wobei der Durchschnitt im Quotientenkörper genommen wird.

Aufgabe 14.8. Sei $R$ eine kommutative $K$-Algebra von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Sei $U \subseteq K-\text{Spek}\,(R)$ eine offene Teilmenge und $f \colon U \to K$ eine Funktion. Es sei $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung mit der Eigenschaft, dass die Einschränkungen $f_i = f|_{U_i}$ algebraische Funktionen sind. Zeige, dass dann $f$ selbst algebraisch ist.

Aufgabe 14.9. Es sei $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $R$ eine $K$-Algebra von endlichem Typ, die ein Integritätsbereich sei. Zeige, dass zu offenen Mengen $U \subseteq V$ die Restriktionsabbildung

$$\Gamma(V, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O})$$

injektiv ist.

Aufgabe 14.10. Betrachte $V = V(XW - YZ) \subseteq \mathbb{A}^4_K$. Beschreibe eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{A}^4_K$ derart, dass der zu $U \cap V \subseteq U$ gehörende Ringhomomorphismus

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(U \cap V, \mathcal{O})$$

nicht surjektiv ist.

In der folgenden Aufgabe wird das Konzept des Limes einer Abbildung verwendet. Dabei könnte Aufgabe 1.6 hilfreich sein.

Aufgabe 14.11. Wir betrachten die durch

$$C = V(Y^2 - X^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$$

gegebene Kurve, den Punkt $P = (0,0) \in C$ und das offene Komplement $U = C \setminus \{P\}$.

(1) Zeige, dass $\frac{Y}{X}$ eine algebraische Funktion auf $U$ ist, die nicht auf ganz $C$ algebraisch ausdehnbar ist.
(2) Zeige, dass der Abbildungslimes zur Funktion

$$\varphi = \frac{Y}{X} \colon U \longrightarrow \mathbb{C}$$

nicht existiert.

(3) Zeige, dass es Folgen $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $U$ gibt, die beide gegen $P$ konvergieren, für die die Bildfolgen unter $\varphi$ jeweils konvergieren, aber gegen unterschiedliche Werte.

Wir kommen zu einer Reihe von äußerst wichtigen Begriffen, die wesentliche Eigenschaften der Strukturgarbe auf einem $K$-Spektrum prägnant zusammenfassen.

Es sei $X$ ein topologischer Raum. Unter einer *Prägarbe* $\mathcal{F}$ auf $X$ versteht man eine Zuordnung, die jeder offenen Menge $U \subseteq X$ eine Menge $\mathcal{F}(U)$ und zu je zwei offenen Mengen $U \subseteq V$ eine Abbildung

$$\rho_{V,U} \colon \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

zuordnet, wobei diese Zuordnung die beiden folgenden Bedingungen erfüllen muss.

(1) Zu $U = V$ ist

$$\rho_{U,U} = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(U)}\,.$$

(2) Zu offenen Mengen

$$U \subseteq V \subseteq W$$

ist stets

$$\rho_{W,U} = \rho_{V,U} \circ \rho_{W,V}\,.$$

Die Abbildungen $\rho_{V,U}$ heißen dabei *Restriktionsabbildungen*.

Eine *Prägarbe von Gruppen* $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum $X$ heißt *Prägarbe von Gruppen*, wenn zu jeder offenen Menge $U \subseteq X$ die Menge $\mathcal{F}(U)$ eine Gruppe und zu jeder Inklusion $U \subseteq V$ die Restriktionsabbildung

$$\rho_{V,U} \colon \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Eine *Prägarbe von Gruppen* $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum $X$ heißt *Prägarbe von kommutativen Ringen*, wenn zu jeder offenen Menge $U \subseteq X$ die Menge $\mathcal{F}(U)$ ein kommutativer Ring und zu jeder Inklusion $U \subseteq V$ die Restriktionsabbildung

$$\rho_{V,U} \colon \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

ein Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe 14.12. Zeige, dass die Zuordnung, die jeder offenen Menge $U \subseteq K-\mathrm{Spek}\,(R)$ den Ring der algebraischen Funktionen $\Gamma(U, \mathcal{O})$ und zu jeder Inklusion $U_1 \subseteq U_2$ die Restriktionsabbildung (siehe Lemma 14.6)

$$\Gamma(U_2, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(U_1, \mathcal{O})$$

zuordnet, eine Prägarbe von $K$-Algebren ist.

Es sei $X$ ein topologischer Raum. Unter einer *Garbe* $\mathcal{F}$ auf $X$ versteht man eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf $X$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt.

(1) Zu jeder offenen Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Elementen $s, t \in \mathcal{F}(U)$ mit $\rho_{U,U_i}(s) = \rho_{U,U_i}(t)$ für alle $i \in I$ gilt $s = t$.
(2) Zu jeder offenen Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Elementen $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\rho_{U_i,U_i \cap U_j}(s_i) = \rho_{U_j,U_i \cap U_j}(s_j)$ für alle $i, j \in I$ gibt es ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_i = \rho_{U,U_i}(s)$ für alle $i \in I$.

Aufgabe 14.13. Es seien $X$ und $Y$ topologische Räume. Zu jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ betrachten wir

$$\mathcal{C}(U) = C^0(U, Y) = \{\varphi : U \to Y \mid \varphi \text{ stetig}\}.$$

Zeige, dass dies eine Garbe auf $X$ ist.

Aufgabe 14.14. Es sei $X$ ein topologischer Raum. Zu jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ betrachten wir

$$\mathcal{C}(U) = C^0(U, \mathbb{R}) = \{\varphi : U \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ stetig}\}.$$

Zeige, dass dies eine Garbe von kommutativen $\mathbb{R}$-Algebren auf $X$ ist.

Aufgabe 14.15. Es sei $M$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zu jeder offenen Teilmenge $U \subseteq M$ betrachten wir die Menge $C^1(U, \mathbb{R})$ der differenzierbaren Funktionen auf $U$. Es sei $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung.

(1) Zeige, dass zu $V \subseteq U$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ auch die Einschränkung $f|_V$ zu $C^1(V, \mathbb{R})$ gehört.
(2) Sei $f \in C^1(M, \mathbb{R})$. Zeige, dass $f = 0$ genau dann ist, wenn sämtliche Einschränkungen $f|_{U_i} = 0$ sind.
(3) Es sei eine Familie $f_i \in C^1(U_i, \mathbb{R})$ von Funktionen gegeben, die die „Verträglichkeitsbedingung“ $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ für alle $i, j$ erfüllen. Zeige, dass es ein $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ gibt mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i$.

Aufgabe 14.16. Zeige, dass die Zuordnung, die jeder offenen Menge $U \subseteq K-\text{Spek}\,(R)$ den Ring der algebraischen Funktionen $\Gamma(U, \mathcal{O})$ und zu jeder Inklusion $U_1 \subseteq U_2$ die Restriktionsabbildung (siehe Lemma 14.6)

$$\Gamma(U_2, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(U_1, \mathcal{O})$$

zuordnet, eine Garbe von $K$-Algebren ist.

In den folgenden Aufgaben werden Ultrafilter und minimale Primideale besprochen. Wir geben die Definition.

Ein Primideal $\mathfrak{p}$ in einem kommutativen Ring heißt *minimales Primideal*, wenn es kein Primideal $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ gibt.

Sei $R$ ein kommutativer Ring. Ein multiplikatives System $F \subseteq R$ nennt man einen *Ultrafilter*, wenn $0 \notin F$ ist und wenn $F$ maximal mit dieser Eigenschaft ist.

AUFGABE 14.17. Sei $R$ ein kommutativer Ring und sei $F \subseteq R$ ein multiplikatives System mit $0 \notin F$. Zeige, dass $F$ genau dann ein Ultrafilter ist, wenn es zu jedem $g \in R$, $g \notin F$, ein $f \in F$ und eine natürliche Zahl $n$ gibt mit $fg^n = 0$.

AUFGABE 14.18. Sei $R$ ein kommutativer Ring und sei $F \subset R$ ein Ultrafilter. Zeige, dass das Komplement von $F$ ein minimales Primideal in $R$ ist.

AUFGABE 14.19. Sei $R$ ein kommutativer Ring und sei $S$ ein multiplikatives System mit $0 \notin S$. Zeige, dass $S$ in einem Ultrafilter enthalten ist.

(Man benutze das Lemma von Zorn).

AUFGABE 14.20. Sei $R$ ein kommutativer, reduzierter Ring. Zeige, dass jeder Nullteiler in einem minimalen Primideal enthalten ist.

AUFGABE 14.21. Es sei $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Radikal mit dem zugehörigen Restklassenring $R = K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$, der der Koordinatenring zu $V = V(\mathfrak{a})$ ist. Zeige, dass die irreduziblen Komponenten von $V$ den minimalen Primidealen von $R$ entsprechen.

AUFGABE 14.22. Sei $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $R$ eine kommutative $K$-Algebra von endlichem Typ. Zeige, dass die minimalen Primideale von $R$ den irreduziblen Komponenten von $K-\operatorname{Spek}(R)$ entsprechen.

## Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 14.23. (4 Punkte)

Sei $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und betrachte die affine Ebene $\mathbb{A}^2_K$. Es sei $P \in \mathbb{A}^2_K$ ein Punkt und $U = \mathbb{A}^2_K \setminus \{P\}$ das offene Komplement davon. Zeige

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) = K[X, Y].$$

(Dies besagt, dass eine außerhalb eines Punktes der Ebene definierte algebraische Funktion sich in den Punkt fortsetzen lässt. In der komplexen Analysis nennt man den entsprechenden Satz den *Riemannschen Hebbarkeitssatz*).

AUFGABE 14.24. (5 (1+2+2) Punkte)

Wir betrachten die Neilsche Parabel

$$C = V(X^2 - Y^3) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}.$$

(1) Zeige, dass auf $C$ die Gleichheit $D(X) = D(Y)$ gilt.
(2) Zeige, dass auf $U = D(Y) \subseteq C$ durch $\frac{X}{Y}$ eine algebraische Funktion definiert ist, die sich nicht auf $C$ als algebraische Funktion ausdehnen lässt.
(3) Zeige, dass die stetige Funktion

$$\frac{X}{Y} \colon D(Y) \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine stetige Fortsetzung auf ganz $C$ besitzt.

AUFGABE 14.25. (4 Punkte)

Sei $R$ eine integre $K$-Algebra $R$ von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $K$. Sei $q \in Q = Q(R)$ ein Element im Quotientenkörper von $R$. Zeige, dass

$$\mathfrak{a} = \{f \in R |\, \text{es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } f^n q \in R\}$$

ein Ideal in $R$ ist. Zeige ferner, dass $D(\mathfrak{a}) \subseteq K-\operatorname{Spek}(R)$ der (maximale) Definitionsbereich der algebraischen Funktion $q$ ist.

AUFGABE 14.26. (4 Punkte)

Sei $R$ ein kommutativer Ring und seien $f_1, \ldots, f_n \in R$ Elemente, die das Einheitsideal erzeugen. Es sei vorausgesetzt, dass die Nenneraufnahmen $R_{f_i}$ noethersch sind für $i = 1, \ldots, n$. Zeige, dass dann auch $R$ noethersch ist.

AUFGABE 14.27. (6 Punkte)

Es sei $K$ ein Körper und $A$ eine endlichdimensionale, reduzierte $K$-Algebra. Zeige, dass dann $A$ ein endliches direktes Produkt von endlichen Körpererweiterungen von $K$ ist.

Hinweis: Man darf ohne Beweis benutzen, dass es in $A$ nur endlich viele Primideale gibt.