Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 13

Übungsaufgaben

Aufgabe 13.1. Sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Man definiert die *Nenneraufnahme*

$$R_S$$

schrittweise wie folgt. Es sei zunächst M die Menge der formalen Brüche mit Nenner in S, also

$$M = \left\{ \frac{r}{s} | \, r \in R, \, s \in S \right\}.$$

Zeige, dass durch

$$\frac{r}{s} \sim \frac{r'}{s'} \text{ genau dann, wenn es ein } t \in S \text{ mit } trs' = tr's \text{ gibt},$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert ist. Wir bezeichnen mit R_S die Menge der Äquivalenzklassen. Definiere auf R_S eine Ringstruktur und definiere einen Ringhomomorphismus $R \to R_S$.

Aufgabe 13.2. Sei R ein Integritätsbereich und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System, $0 \notin S$.

(1) Zeige, dass die Nenneraufnahme zu S, also R_S mit
$$R_S := \left\{ \frac{f}{g} | \, f \in R, \, g \in S \right\} \subseteq Q(R)$$
ein Unterring von $Q(R)$ ist.
(2) Zeige, dass nicht jeder Unterring von $Q(R)$ eine Nenneraufnahme ist.

Aufgabe 13.3.*

Zeige, dass der Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ überabzählbar viele Unterringe besitzt.

Aufgabe 13.4. Sei R ein kommutativer Ring und sei $f \in R$ mit zugehöriger Nenneraufnahme R_f. Beweise die R-Algebraisomorphie

$$R_f \cong R[T]/(Tf - 1).$$

Aufgabe 13.5. Sei R ein kommutativer Ring, $f \in R$ ein Element und R_f die zugehörige Nenneraufnahme. Zeige, dass f genau dann nilpotent ist, wenn R_f der Nullring ist.

In den folgenden Aufgaben dürfen Sie, wenn Sie wollen, bei Nenneraufnahmen annehmen, dass Integritätsbereiche vorliegen.

Aufgabe 13.6. Es seien R und A kommutative Ringe und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Es sei

$$\varphi\colon R \longrightarrow A$$

ein Ringhomomorphismus derart, dass $\varphi(s)$ eine Einheit in A ist für alle $s \in S$. Zeige: Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus

$$\tilde{\varphi}\colon R_S \longrightarrow A,$$

der φ fortsetzt.

Aufgabe 13.7.*

Sei K ein Körper, $R = K[X,Y]$ der Polynomring in zwei Variablen, $S \subseteq R$ ein multiplikatives System und $F \in R$ ein Polynom. Zeige, dass es eine eindeutige R-Algebraisomorphie

$$(R/(F))_S \cong (R_S)/(F)$$

gibt.

Aufgabe 13.8. Sei R ein Integritätsbereich und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass die Primideale in R_S genau denjenigen Primidealen in R entsprechen, die mit S einen leeren Durchschnitt haben.

Aufgabe 13.9. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien R und S kommutative K-Algebren von endlichem Typ. Es sei $f \in R$ und $\varphi : R \to S$ sei ein K-Algebrahomomorphismus Zeige, dass die Spektrumsabbildung φ^* genau dann durch $D(f)$ faktorisiert, wenn $\varphi(f)$ eine Einheit in S ist.

Aufgabe 13.10.*

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und R eine integre endlich erzeugte K-Algebra. Es seien $f, g \in R$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) $D(f) \subseteq D(g)$
(2) Es gibt einen R-Algebrahomomorphismus $R_g \to R_f$.

Zeige ferner, dass diese Äquivalenz für $K = \mathbb{R}$ nicht gilt.

Die folgende Aufgabe verwendet den Begriff des saturierten multiplikativen Systems.

Ein multiplikatives System S in einem kommutativen Ring R heißt *saturiert*, wenn folgendes gilt: Ist $g \in R$ und gibt es ein $f \in S$, das von g geteilt wird, so ist auch $g \in S$.

Aufgabe 13.11. Seien A, B kommutative Ringe und sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus . Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(B^\times)$ der Einheitengruppe ein saturiertes multiplikatives System in A ist.

Aufgabe 13.12. Sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass die Menge der Nichtnullteiler in R ein saturiertes multiplikatives System bilden.

Aufgabe 13.13.*

Man gebe ein Beispiel einer integren, endlich erzeugten $\mathbb{C}$-Algebra R und eines multiplikativen Systems $S \subseteq R$, $0 \notin S$, an derart, dass die Nenneraufnahme R_S kein Körper ist, aber jedes maximale Ideal aus R zum Einheitsideal in R_S wird.

Aufgabe 13.14.*

Wir betrachten das Polynom

$$F = X^4Y^2 + X^2Y^4 - 3X^2Y^2 + 1.$$

(1) Finde eine reelle Nullstelle von F.
(2) Bestätige die Gleichung
$$\begin{aligned} & F \cdot (X^2 + Y^2 + 1) \\ = \ & (X^2Y - Y)^2 + (XY^2 - X)^2 + (X^2Y^2 - 1)^2 + \frac{1}{4}(XY^3 - X^3Y)^2 \\ & + \frac{3}{4}(XY^3 + X^3Y - 2XY)^2. \end{aligned}$$
(3) Sei $K = \mathbb{R}$. Folgere, dass
$$F(x, y) \geq 0$$
ist für alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

Bemerkung: Nach einem Satz von Artin (Lösung des 17. Hilbertschen Problems) kann man jedes reelle Polynom, das nirgendwo negative Werte annimmt, als eine Summe von Quadraten von rationalen Funktionen schreiben. Das vorstehende *Motzkin-Polynom* F gibt ein konkretes Beispiel dafür, dass man ein solches Polynom im Allgemeinen nicht als Summe von Quadraten von Polynomen schreiben kann. Wir haben aber lediglich die Nichtnegativität bewiesen.

Aufgabe 13.15. Zeige, dass ein Integritätsbereich ein zusammenhängender Ring ist.

Aufgabe 13.16. Sei R ein kommutativer Ring und sei $f \in R$. Es sei f sowohl nilpotent als auch idempotent. Zeige, dass $f = 0$ ist.

Aufgabe 13.17.*

Man gebe zu jedem $n \geq 2$ einen kommutativen Ring R und ein Element $x \in R$, $x \neq 0$, an, für das $nx = 0$ und $x^n = 0$ gilt.

Aufgabe 13.18. Sei R ein kommutativer Ring und sei $e \in R$ ein idempotentes Element. Zeige, dass es eine natürliche Ringisomorphie

$$R_e \cong R/(1-e)$$

gibt.

(Dies zeigt erneut, dass $D(e)$ offen und abgeschlossen ist).

Aufgabe 13.19. Seien R und S kommutative Ringe und sei $R \times S$ der Produktring $R \times S$. Zeige, dass die Teilmenge $R \times 0$ ein Hauptideal ist.

Aufgabe 13.20.*

Es sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass der Restklassenring $\mathbb{Z}/(p^n)$ nur die beiden trivialen idempotenten Elemente 0 und 1 besitzt.

Aufgabe 13.21.*

Schreibe den Restklassenring $\mathbb{Q}[X]/(X^4-1)$ als ein Produkt von Körpern, wobei lediglich die Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$ vorkommen. Schreibe die Restklasse von $X^3 + X$ als ein Tupel in dieser Produktzerlegung.

Aufgabe 13.22. Sei X ein topologischer Raum, der nicht leer und nicht zusammenhängend sei. Zeige, dass es dann eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f \neq 0, 1$, ($\mathbb{R}$ sei mit der metrischen Topologie versehen) gibt, die idempotent im Ring der stetigen Funktionen auf X ist.

Aufgabe 13.23. Es sei X ein topologischer Raum mit einer disjunkten Zerlegung

$$X = U \uplus V$$

aus offenen Teilmengen $U, V \subseteq X$. Zeige, dass die natürliche Abbildung

$$C(X, \mathbb{R}) \longrightarrow C(U, \mathbb{R}) \times C(V, \mathbb{R}),\ f \longmapsto (f|_U, f|_V),$$

bijektiv ist.

Aufgabe 13.24. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es seien $a_1, \ldots, a_n \in K$ verschiedene Elemente und

$$F = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$$

das Produkt der zugehörigen linearen Polynome. Zeige, dass der Restklassenring $K[X]/(F)$ isomorph zum Produktring K^n ist.

Aufgabe 13.25. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass der Restklassenring zu einem Polynom $F \neq 0$ die Struktur

$$K[X]/(F) \cong K[T]/(T^{n_1}) \times \cdots \times K[T]/(T^{n_r})$$

besitzt. Zeige, dass dabei

$$\operatorname{grad}(F) = n_1 + \cdots + n_r$$

ist.

Aufgabe 13.26.*

Sei R ein kommutativer Ring mit Reduktion S. Zeige, dass die Abbildung, die den idempotenten Elementen aus R ihre Restklasse in S zuordnet, injektiv ist.

Aufgabe 13.27.*

Sei R ein kommutativer Ring mit einem Element $n \in R$ mit $n^2 = 0$ in R und sei

$$S = R/(n).$$

Zeige, dass es zu jedem idempotenten Element e aus S ein idempotentes Element aus R gibt, dessen Restklasse gleich e ist.

Aufgabe 13.28. Sei R ein noetherscher kommutativer Ring mit Reduktion S. Zeige, dass es eine Folge von kommutativen Ringen R_i, $1 \leq i \leq n$, und surjektiven Ringhomomorphismen

$$\varphi_i \colon R_i \longrightarrow R_{i+1}$$

derart gibt, dass die Gesamtabbildung

$$R = R_0 \to R_1 \to R_2 \to \cdots \to R_{n-1} \to R_n = S$$

die Reduktionsabbildung ist und jedes φ_i der Restklassenhomomorphismus

$$R \longrightarrow R/(x_i)$$

zu einem Element $x_i \in R_i$ mit $x_i^2 = 0$ in R_i ist.

Aufgabe 13.29. Sei R ein kommutativer Ring mit Reduktion S. Zeige, dass die Abbildung, die den idempotenten Elementen aus R ihre Restklasse in S zuordnet, surjektiv ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 13.30. (5 Punkte)

Sei R ein Hauptidealbereich mit Quotientenkörper $Q = Q(R)$. Zeige, dass jeder Zwischenring S, $R \subseteq S \subseteq Q$, eine Nenneraufnahme ist.

Aufgabe 13.31. (6 Punkte)

Betrachte die durch $Y^2 = X^3 + X^2$ gegebene Kurve C (siehe Beispiel 6.3 und die offene Menge $U = D(X) \subseteq C$. Finde eine abgeschlossene Realisierung von U in $\mathbb{A}^3_K$ und zeige, dass es auch eine solche Realisierung in $\mathbb{A}^2_K$ gibt. Skizziere die Bildkurve unter der Abbildung

$$U \longrightarrow \mathbb{A}^2_K,\ (x,y) \longmapsto \left(\frac{1}{x}, y\right).$$

Ist U isomorph zu einer offenen Menge der affinen Geraden?

Aufgabe 13.32. (4 Punkte)

Betrachte zwei parallele Geraden V und das Achsenkreuz W. Beschreibe eine möglichst natürliche surjektive Abbildung zwischen V und W (in welche Richtung?), und zwar sowohl geometrisch als auch algebraisch. Gibt es auch eine surjektive polynomiale Abbildung in die andere Richtung?

Aufgabe 13.33. (3 Punkte)

Bestimme die nilpotenten und die idempotenten Elemente in $\mathbb{Z}/(175)$.

Aufgabe 13.34. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und betrachte den Durchschnitt der beiden algebraischen Kurven

$$V(X^2 + Y^2 - 1) \text{ und } V(Y - X^2).$$

Identifiziere den Restklassenring

$$R = K[X,Y]/(X^2 + Y^2 - 1, Y - X^2)$$

mit einem Produktring und beschreibe die Restklassenabbildung $K[X,Y] \to R$ mittels dieser Identifizierung. Bestimme Urbilder in $K[X,Y]$ für sämtliche idempotenten Elemente des Produktringes.