Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 12

Übungsaufgaben

Aufgabe 12.1. Bestimme das $\mathbb{R}$-Spektrum von $\mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$.

Aufgabe 12.2. Bestimme das K-Spektrum von K^n.

Aufgabe 12.3. Bestimme das $\mathbb{R}$-Spektrum der $\mathbb{R}$-Algebra $\mathbb{C}$.

Aufgabe 12.4. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ. Zeige, dass die Punkte aus $K-$Spek (R) den maximalen Idealen in R entsprechen.

Aufgabe 12.5. Sei R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ. Zeige, dass für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ in $K-$Spek (R) die Gleichheit

$$V(\mathfrak{a}) = V(\operatorname{rad}(\mathfrak{a}))$$

gilt.

Aufgabe 12.6. Zeige, dass die Zariski-Topologie auf dem K-Spektrum einer endlich erzeugten kommutativen K-Algebra R wirklich eine Topologie ist.

Aufgabe 12.7. Es sei K ein Körper und sei $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine affin-algebraische Menge mit Verschwindungsideal Id (V) und Koordinatenring

$$R := K[X_1, \ldots, X_n]/\operatorname{Id}(V).$$

Zeige, dass das K-Spektrum von R homöomorph zu V ist.

Aufgabe 12.8. Man beschreibe zu einer kommutativen K-Algebra R von endlichem Typ die Spektrumsabbildung, die zum Strukturhomomorphismus der Algebra gehört.

Aufgabe 12.9. Seien R, S, T kommutative K-Algebren von endlichem Typ und $\varphi\colon R \to S$ und $\psi\colon S \to T$ seien K-Algebrahomomorphismen. Man zeige, dass für die zugehörigen Spektrumsabbildungen

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$$

gilt. Ferner zeige man, dass zur Identität $\operatorname{Id}\colon R \to R$ auch Id^* die Identität ist.

Aufgabe 12.10. Man gebe ein Beispiel von zwei kommutativen K-Algebren R, S von endlichem Typ und einer stetigen Abbildung zwischen den zugehörigen K-Spektren, die nicht von einem K-Algebrahomomorphismus herrühren kann.

Aufgabe 12.11. Sei K ein Körper und R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ, und sei $F \in R$. Es sei

$$\varphi^* \colon K-\text{Spek }(R) \longrightarrow \mathbb{A}^1_K$$

die zum Einsetzungshomomorphismus gehörende Spektrumsabbildung. Zeige, dass

$$(\varphi^*)^{-1}(0) \,=\, V(F)$$

ist.

Aufgabe 12.12. Sei K ein Körper und sei R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ mit der Reduktion $S = R_{\text{red}}$. Zeige, dass es eine natürliche Homöomorphie

$$K-\text{Spek }(R) \,\cong\, K-\text{Spek }(S)$$

gibt.

Aufgabe 12.13.*

Sei K ein Körper, R eine endlich erzeugte K-Algebra, sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und sei $X = K-\text{Spek }(R)$. In welcher Beziehung stehen die beiden Aussagen

$$V(\mathfrak{a}) = \emptyset \text{ und } \mathfrak{a} \text{ ist das Einheitsideal}$$

und die beiden Aussagen

$$V(\mathfrak{a}) = X \text{ und } \mathfrak{a} \text{ ist nilpotent}$$

zueinander. Zeige, dass die Antwort davon abhängt, ob K algebraisch abgeschlossen ist oder nicht.

Aufgabe 12.14. Welche „Funktoren“ in der Mathematik kennen Sie?

Bei den folgenden Aufgaben betrachten wir zu einem beliebigen topologischen Raum (Mannigfaltigkeit, Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, reelles Intervall) den Ring der stetigen reellwertigen Funktionen darauf. Dabei sollte man die Räume in Analogie zu den K-Spektren und die Funktionenringe in Analogie zu den (Koordinaten)- ringen sehen.

Aufgabe 12.15. Es sei X ein topologischer Raum und

$$R \,=\, C(X, \mathbb{R}) \,=\, \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetige Abbildung}\}\,.$$

Zeige, dass R ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 12.16. Wir betrachten den Ring $R = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Handelt es sich um einen Integritätsbereich?

Aufgabe 12.17. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Zeige, dass im Ring der stetigen Funktionen

$$R = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

die Teilmenge

$$I = \{f \in R \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in T\}$$

ein Ideal in R ist.

Aufgabe 12.18. Wir betrachten das Ideal zu $T = \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ im Sinne von Aufgabe 12.17. Ist dies ein Hauptideal?

Aufgabe 12.19. Sei X ein topologischer Raum und $R = \mathrm{C}^0(X, \mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen auf X. Es sei $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Teilmenge

$$I = \{f \in R \mid f|_T = 0\}$$

ein Ideal in R ist. Definiere einen Ringhomomorphismus

$$R/I \longrightarrow \mathrm{C}^0(T, \mathbb{R}).$$

Ist dieser immer injektiv? Surjektiv?

Aufgabe 12.20. Es seien X und Y topologische Räume und

$$\varphi \colon X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Zeige, dass dies einen Ringhomomorphismus

$$C(Y, \mathbb{R}) \longrightarrow C(X, \mathbb{R}),\; f \longmapsto f \circ \varphi,$$

induziert.

Aufgabe 12.21. Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $C(X, \mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Dann ist durch

$$\varphi \colon C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow C(X, \mathbb{R}),\; f \longmapsto f|_X,$$

ein Ringhomomorphismus gegeben.

(1) Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn X abgeschlossen ist.
(2) Für welche Mengen X ist φ injektiv?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.22. (3 Punkte)

Sei K ein unendlicher Körper und R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ, und sei $F \in R$. Es sei

$$\varphi^* \colon K-\text{Spek}\,(R) \longrightarrow \mathbb{A}^1_K$$

die zum Einsetzungshomomorphismus gehörende Spektrumsabbildung Zeige, dass F genau dann konstant ist, wenn φ^* konstant ist.

Man mache sich dabei auch die unterschiedlichen Bedeutungen von „konstant“ klar.

Aufgabe 12.23. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von zwei integren K-Algebren von endlichem Typ R und S und einem K-Algebrahomomorphismus $\varphi \colon R \to S$, der kein Ringisomorphismus ist, wo aber die induzierte Spektrumsabbildung $\varphi^* \colon K-\text{Spek}\,(S) \to K-\text{Spek}\,(R)$ ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 12.24. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien R und S integre K-Algebren von endlichem Typ. Es sei $\varphi \colon R \to S$ ein endlicher injektiver K-Algebrahomomorphismus. Zeige, dass dann $\varphi^* \colon K\text{–Spek}\,(S) \to K\text{–Spek}\,(R)$ surjektiv ist.

Aufgabe 12.25. (6 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0. Es sei eine polynomiale Abbildung der Form

$$\varphi \colon \mathbb{A}^1_K \longrightarrow \mathbb{A}^2_K,\ t \longmapsto (t^2, \psi(t)),$$

gegeben (mit $\psi(t) \in K[t]$) Zeige, dass φ genau dann injektiv ist, wenn ψ die Form hat

$$\psi(t) \,=\, at^n + \theta(t)$$

mit $a \neq 0$, n ungerade und $\theta(t)$ ein Polynom, in dem nur geradzahlige Exponenten auftreten.