Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 11

Übungsaufgaben

Aufgabe 11.1. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f, g \in K[X_1, \ldots, X_n]$. Zeige, dass $V(f) \subseteq V(g)$ genau dann gilt, wenn es eine natürliche Zahl r und ein $h \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $fh = g^r$ gibt. Betrachte auch die Spezialfälle, wo f bzw. g konstante Polynome sind.

Aufgabe 11.2. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Beweise den Hilbertschen Nullstellensatz direkt für den Polynomring in einer Variablen.

Aufgabe 11.3. Zeige, dass sich in der durch den Hilbertschen Nullstellensatz gegebenen Korrespondenz Punkte und maximale Ideale entsprechen.

Aufgabe 11.4. Zeige, dass sich in der durch den Hilbertschen Nullstellensatz gegebenen Korrespondenz irreduzible Varietäten und Primideale entsprechen.

Aufgabe 11.5. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Beweise den folgenden Spezialfall des Hilbertschen Nullstellensatzes direkt: Wenn $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ keine Nullstelle im K^n besitzt, so ist f ein (von 0 verschiedenes) konstantes Polynom.

Aufgabe 11.6.*

Wir betrachten die beiden Polynome X^2+Y^2 und X^2-Y^3 und die zugehörigen algebraischen Kurven über den Körpern $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

(1) Gilt $V(X^2+Y^2) \subseteq V(X^2-Y^3)$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$?
(2) Gilt $V(X^2+Y^2) \subseteq V(X^2-Y^3)$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$?
(3) Gehört X^2-Y^3 zum Radikal von (X^2+Y^2) in $\mathbb{R}[X,Y]$?
(4) Gehört X^2-Y^3 zum Radikal von (X^2+Y^2) in $\mathbb{C}[X,Y]$?

Aufgabe 11.7. Es seien Polynome $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ gegeben, die wir als Funktionen

$$f_i \colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

auffassen. Es sei $f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ ein weiteres Polynom und es seien

$$g_1, \ldots, g_k \colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

Funktionen, die nicht unbedingt Polynome sind. Es gelte

$$f = g_1 f_1 + \cdots + g_k f_k$$

(eine Gleichung von Funktionen). Zeige, dass f zum Radikal von $(f_1, \ldots, f_k)$ gehört.

Aufgabe 11.8. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Funktionen $\varphi \colon K^n \to K$ der Form

$$\varphi = \frac{P}{Q}$$

mit Polynomen $P, Q \in K[X_1, \ldots, X_n]$ und Q nullstellenfrei auf K^n einen kommutativen Ring bilden. Zeige, dass bei K algebraisch abgeschlossen dieser mit dem Polynomring übereinstimmt.

Aufgabe 11.9. Es sei K ein endlicher Körper. Zeige, dass es nur endlich viele Nullstellengebilde im $\mathbb{A}^n_K$ gibt, aber unendlich viele Radikale in $K[X_1, \ldots, X_n]$.

Aufgabe 11.10. Sei R ein kommutativer Ring und sei f_j, $j \in J$, eine Familie von Elementen in R. Es sei angenommen, dass die f_j zusammen das Einheitsideal erzeugen. Zeige, dass es eine endliche Teilfamilie f_j, $j \in J_0 \subseteq J$ gibt, die ebenfalls das Einheitsideal erzeugt.

Aufgabe 11.11. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ zwei Radikalideale. Zeige, dass die Nullstellengebilde $V(\mathfrak{a})$ und $V(\mathfrak{b})$ genau dann affin-linear äquivalent sind, wenn es eine affin-lineare Variablentransformation gibt, die die beiden Ideale ineinander überführt.

Es sei

$$\varphi \colon A \longrightarrow B$$

ein Ringhomomorphismus zwischen den kommutativen Ringen A und B. Zu einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ nennt man das von $\varphi(\mathfrak{a})$ erzeugte Ideal das *Erweiterungsideal* von $\mathfrak{a}$ unter φ. Es wird mit $\mathfrak{a}B$ bezeichnet.

Aufgabe 11.12. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal und $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Zeige, dass genau dann $f \in \mathfrak{a}$ gilt, wenn $f \in \mathfrak{a}\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ für das Erweiterungsideal gilt.

Aufgabe 11.13. Skizziere die Graphen der Funktionen x und y auf $V(xy)$. Man mache sich klar, dass das Produkt xy die Nullfunktion ist.

Aufgabe 11.14. Bestimme den Koordinatenring zu einer affin-algebraischen Menge $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$, die aus d Punkten besteht.

Aufgabe 11.15. Bestimme den Koordinatenring zur affin-algebraischen Menge $V = V(5X - 8Y + 3) \subseteq \mathbb{A}_K^2$.

Aufgabe 11.16. Betrachte die Hyperbel $V(xy - 1)$ über dem Körper $K = \mathbb{Z}/(11)$. Bestimme das Inverse von $4x^3$ im zugehörigen Koordinatenring.

Aufgabe 11.17. Es sei K ein Körper und $V, W \subseteq \mathbb{A}_K^n$ seien zwei affin-algebraische Mengen. Es sei $V \subseteq W$ vorausgesetzt. Man definiere einen K-Algebrahomomorphismus zwischen den beiden Koordinatenringen $R(V)$ und $R(W)$ und beschreibe dessen wichtigste Eigenschaften. Man gebe ein Beispiel von zwei affin-algebraischen Mengen, die nicht ineinander enthalten sind, von denen aber die Koordinatenringe isomorph sind.

Aufgabe 11.18. Es sei K ein Körper und seien

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$$

Ideale, deren Radikal übereinstimmt. Zeige, dass es eine natürliche Bijektion zwischen den Radikalen der Restklassenringe

$$K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a} \text{ und } K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{b}$$

gibt.

Aufgabe 11.19. Es sei K ein Körper mit q Elementen und sei $V = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine affin-algebraische Menge. Zeige, dass der Koordinatenring von V nicht gleich $K[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^q - x_1, \ldots, x_n^q - x_n) + \mathfrak{a}$ sein muss.

Aufgabe 11.20. Es sei K ein Körper der Charakteristik 0. Wir betrachten den Schnitt von einem Zylinder und einer Kugel, und zwar

$$C = V(X^2 + Y^2 - 1) \cap V((X - 3)^2 + Y^2 + Z^2 - 7) \subseteq \mathbb{A}_K^3.$$

Zeige, dass man den Koordinatenring von C als Restklassenring eines Polynomrings in zwei Variablen schreiben kann.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 11.21. (4 Punkte)

Sei $F \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ und sei $U \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ eine Teilmenge, die in der metrischen Topologie offen und nicht leer sei. Es sei $F|_U = 0$ die Nullfunktion. Zeige, dass dann F das Nullpolynom ist.

Aufgabe 11.22. (3 Punkte)

Beweise Korollar 11.3 direkt aus Satz 10.10.

Aufgabe 11.23. (7 Punkte)

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und R der Polynomring in n Variablen über K. Wir wollen einen alternativen Beweis einsehen, dass $\operatorname{Id}(V(J)) = \operatorname{rad}(J)$ für jedes Ideal J in R ist, der auf Korollar 11.3 aufbaut. Sei $f \in \operatorname{Id}(V(J))$. Betrachte den Ring $R[T]$ und zeige, dass das Ideal

$$J' = (J, 1 - f \cdot T)$$

trivial ist. Schließe daraus, dass f im Radikal von J liegt.

Aufgabe 11.24. (3 Punkte)

Sei $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ und betrachte die dadurch definierte polynomiale Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^{n+1},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_n, F(x_1, \ldots, x_n)),$$

die eine Bijektion des affinen Raumes mit dem Graphen von F definiert. Zu einer affin-algebraischen Menge $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ betrachten wir das Bild $V' = \varphi(V)$. Man zeige, dass V' ebenfalls affin-algebraisch ist und man gebe ein beschreibendes Ideal an. Zeige, dass V genau dann irreduzibel ist, wenn V' irreduzibel ist.

Aufgabe 11.25. (5 Punkte)

Wir betrachten die beiden algebraischen Kurven

$$V(x^2 + y^2 - 2) \text{ und } V(x^2 + 2y^2 - 1)$$

über dem Körper $\mathbb{Z}/(7)$. Zeige, dass der Durchschnitt leer ist, und finde einen Erweiterungskörper $K \supseteq \mathbb{Z}/(7)$, über dem der Durchschnitt nicht leer ist. Berechne alle Punkte im Durchschnitt über K und über jedem anderen Erweiterungskörper. Man beschreibe auch den Koordinatenring des Durchschnitts.

Aufgabe 11.26. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und seien $P_1, \ldots, P_n$ endlich viele Punkte in der affinen Ebene $\mathbb{A}_K^2$. Es seien $a_1, \ldots, a_n \in K$ beliebig vorgegebene Werte. Zeige, dass es ein Polynom $F \in K[X, Y]$ mit $F(P_i) = a_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gibt.