Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 1

Übungsaufgaben

AUFGABE 1.1. Skizziere im $\mathbb{R}^2$ die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

(1) $x^2 - y^2 - 1 = 0$,
(2) $x^2 + xy + y^2 = 0$,
(3) $x^2 + y^2 + 1 = 0$,
(4) $x^2 + y^2 = 0$,
(5) $x^2 + y^3 = 0$,
(6) $x^3 - y^5 = 0$,
(7) $x^2 - x^3 = 0$,
(8) $x^3 + y^3 = 1$,
(9) $x^4 + y^4 = 1$,
(10) $-5 + 3x + 4x^2 + x^3 - y^2 = 1$.

AUFGABE 1.2. Berechne den Durchschnitt der Kurven aus Aufgabe 1.1 mit den folgenden Geraden.

(1) $x = 0$,
(2) $y = 0$,
(3) $x = 1$,
(4) $y = -2$,
(5) $x = y$,
(6) $x = -y$,
(7) $2x - 3y + 4 = 0$.

AUFGABE 1.3.*

Finde auf der ebenen algebraischen Kurve

$$V(X^3 - Y^3 + 4X^2 - 2XY + Y + 3) \subset \mathbb{C}^2$$

einen Punkt.

AUFGABE 1.4. Das Bild der durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \left(t^2,\ t^3\right),$$

definierten Kurve heißt *Neilsche Parabel*. Zeige, dass ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau dann zu diesem Bild gehört, wenn er die Gleichung $x^3 = y^2$ erfüllt.

Aufgabe 1.5. Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^2$ das Bild unter der polynomialen Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \left(t^3 - 1,\ t^2 - 1\right).$$

Bestimme ein Polynom $F \neq 0$ in zwei Variablen derart, dass C auf dem Nullstellengebilde zu F liegt.

Aufgabe 1.6. Wir betrachten die Kurve

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t^2 - 1, t^3 - t).$$

a) Zeige, dass die Bildpunkte (x, y) der Kurve die Gleichung

$$y^2 = x^2 + x^3$$

erfüllen.

b) Zeige, dass jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y^2 = x^2 + x^3$ zum Bild der Kurve gehört.

c) Zeige, dass es genau zwei Punkte t_1 und t_2 mit identischem Bildpunkt gibt, und dass ansonsten die Abbildung injektiv ist.

Aufgabe 1.7. Diskutiere den Zusammenhang zwischen ebenen algebraischen Kurven und dem Satz über implizite Funktionen.

Aufgabe 1.8. Sei $K = \mathbb{Z}/(7)$. Bestimme alle Punkte in $K^2 = K \times K$, die auf der Kurve liegen, die durch die Gleichung

$$X^2Y + 2Y^3 + 3Y^2 = 0$$

gegeben ist. Wie viele Lösungen gibt es?

Aufgabe 1.9.*

Finde eine Gerade $G \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, die die Kurve

$$C = V(X^3 + Y^3 + 1) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$$

in genau einem Punkt schneidet.

Aufgabe 1.10.*

Zeige, dass die Neilsche Parabel

$$C = V\left(Y^2 - X^3\right) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$$

jede Gerade durch den Punkt $P = (1, 1) \in C$ in mindestens einem weiteren Punkt trifft.

Aufgabe 1.11.*

Begründe analytisch, dass es einen reellen Schnittpunkt des Einheitskreises $V(x^2 + y^2 - 1)$ mit der Neilschen Parabel $V(y^2 - x^3)$ gibt und bestimme numerisch die reelle x-Koordinate eines solchen Schnittpunktes mit einem Fehler $\leq 0,1$.

Aufgabe 1.12. Es sei K ein Körper und es sei

$$K \longrightarrow K^2,\; t \longmapsto (P(t), Q(t)),$$

eine durch zwei Polynome $P(t), Q(t) \in K[t]$ gegebene Abbildung. Es sei B das Bild dieser Abbildung und es sei $G \subseteq K^2$ eine Gerade. Zeige, dass $B \subseteq G$ ist oder dass der Durchschnitt $B \cap G$ endlich ist.

Aufgabe 1.13. Multipliziere in $\mathbb{Z}[x, y, z]$ die beiden Polynome

$$x^5 + 3x^2y^2 - xyz^3 \text{ und } 2x^3yz + z^2 + 5xy^2z - x^2y\,.$$

Aufgabe 1.14. Multipliziere in $\mathbb{Z}/(5)[x, y]$ die beiden Polynome

$$x^4 + 2x^2y^2 - xy^3 + 2y^3 \text{ und } x^4y + 4x^2y + 3xy^2 - x^2y^2 + 2y^2\,.$$

Aufgabe 1.15. Sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass dann auch der Polynomring $R[X]$ integer ist.

Aufgabe 1.16.*

Sei R ein Integritätsbereich und $R[X]$ der Polynomring über R. Zeige, dass die Einheiten von $R[X]$ genau die Einheiten von R sind.

Aufgabe 1.17.*

Sei K ein Körper. Zeige, dass die beiden folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(1) K ist algebraisch abgeschlossen.
(2) Jedes nicht-konstante Polynom $F \in K[X]$ zerfällt in Linearfaktoren.

Aufgabe 1.18. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Bestimme in $K[X]$ die irreduziblen Polynome.

Aufgabe 1.19. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass K nicht endlich sein kann.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 1.20. (4 Punkte)

Betrachte Gleichungen der Form

$$y^2 = G(x) \text{ mit } G(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

über $\mathbb{R}$. Skizziere die verschiedenen Lösungsmengen für die Koeffizienten $a, b, c \in \{1, -1, 0\}$.

Aufgabe 1.21. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ folgende Polynomdivision aus.

$$X^4 + 5X^2 + 3 \text{ durch } 2X^2 + X + 6\,.$$

Aufgabe 1.22. (5 Punkte)

Bestimme im Polynomring $\mathbb{Z}/(3)[X]$ alle irreduziblen Polynome vom Grad 4.

Aufgabe 1.23. (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

für die Körper $K = \mathbb{Z}/(2)$, $\mathbb{Z}/(5)$ und $\mathbb{Z}/(11)$.

Aufgabe 1.24. (5 Punkte)

Es sei $C \subseteq \mathbb{C}^2$ das Bild unter der polynomialen Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2,\ t \longmapsto \left(t^3 - t^2 + 4t + 3,\ -t^2 + 5t - 1\right).$$

Bestimme ein Polynom $F \neq 0$ in zwei Variablen derart, dass C auf dem Nullstellengebilde zu F liegt.

Aufgabe 1.25. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2,$$

die einem Punkt $t \in \mathbb{R}$ den eindeutigen Schnittpunkt $\neq (0, -1)$ der durch die beiden Punkte $(t, 1)$ und $(0, -1)$ gegebenen Geraden G_t mit dem Einheitskreis

$$S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

zuordnet. Zeige, dass diese Abbildung wohldefiniert ist und bestimme die funktionalen Ausdrücke, die diese Abbildung beschreiben. Zeige, dass f differenzierbar ist. Ist f injektiv, ist f surjektiv?