Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2008/2009**

Vorlesung über algebraische Kurven

Probeklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in der noch nicht geschrieben werden darf. Hilfsmittel: Erlaubt ist lediglich ein DinA4-Blatt (zweiseitig) mit beliebigem Inhalt. Taschenrechner oder sonstige Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Alle Antworten sind zu begründen. Es gibt insgesamt 64 Punkte. Zum Bestehen braucht man 16 Punkte und für eine Eins braucht man 32 Punkte. Viel Erfolg!

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Bestimme die Primfaktorzerlegung des Polynoms

$$X^3 + XY^2 \in \mathbb{C}[X, Y]$$

und bestimme die Singularitäten der zugehörigen affinen Kurve samt ihren Multiplizitäten und Tangenten.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine polynomiale Abbildung

$$\mathbb{A}^2_K \to \mathbb{A}^1_K$$

derart, dass das Urbild von einem Punkt reduzibel ist, das Urbild von allen anderen Punkten aber irreduzibel.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei K ein Körper, $R = K[X, Y]$ der Polynomring in zwei Variablen, $S \subseteq R$ ein multiplikatives System und $F \in R$ ein Polynom. Zeige, dass es eine eindeutige R-Algebra Isomorphie

$$(R/(F))_S \cong (R_S)/(F)$$

gibt.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und R eine integre endlich erzeugte K-Algebra. Es seien $f, g \in R$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) $D(f) \subseteq D(g)$
(2) Es gibt einen R-Algebra Homomorphismus $R_g \to R_f$.

Zeige ferner, dass diese Äquivalenz für $K = \mathbb{R}$ nicht gilt.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Bestimme für die ebene algebraische Kurve

$$V(X^3 + Y^2 - XY + X)$$

eine Potenzreihenlösung $X = F(Y)$ im Nullpunkt bis zum sechsten Glied.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Bestimme den globalen Schnittring

$$\Gamma(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}).$$

Was folgt daraus für einen Morphismus $\mathbb{P}^1_K \to \mathbb{A}^1_K$?

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Z}/(5)$ und betrachte die beiden affinen ebenen algebraischen Kurven

$$C = V(X^2 + Y^2 - 1) \text{ und } D = V(X^3 - 2Y^2 + 3).$$

Bestimme den Durchschnitt $C \cap D$. Bestimme ferner die unendlich fernen Punkte der beiden Kurven (also die zusätzlichen Punkte auf dem projektiven Abschluss $\bar{C}$ bzw. $\bar{D}$). Wenn man K durch einen algebraisch abgeschlossenen Körper $K \subset L$ ersetzt, wie viele Punkte besitzt dann der Durchschnitt $\bar{C} \cap \bar{D}$ und wie viele davon liegen auf der unendlich fernen Geraden?

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Man beschreibe einen K-Algebra-Homomorphismus derart, dass die induzierte Abbildung der K-Spektren die Addition auf K beschreibt.

Aufgabe 9. (5 Punkte)

Bestimme über die partiellen Ableitungen für das durch das Polynom

$$V^3 + U^2V - 2UV + 2U^2 - 4U - 2V$$

gegebene Nullstellengebilde einen singulären Punkt. Führe eine Koordinatentransformation durch, die diesen Punkt in den Nullpunkt überführt. Bestimme die Multiplizität und die Tangenten in diesem Punkt.

Aufgabe 10. (5 Punkte)

Es sei $P \in C = V(F) \subset \mathbb{A}^2_K$ ein glatter Punkt einer ebenen irreduziblen Kurve. Zeige, dass der zugehörige lokale Ring ein diskreter Bewertungsring ist.

Man darf dabei eine beliebige Charakterisierung von diskreter Bewertungsring verwenden.

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Ein Geldfälscher stellt $7-, 11-, 13-$ und $37-$Euro-Scheine her. Wie viele volle Eurobeträge kann er mit seinen Scheinen nicht bezahlen, und was ist der größte Betrag, den er nicht begleichen kann. Bestimme die Multiplizität und die Einbettungsdimension des zugehörigen numerischen Monoids.

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Bestimme die Schnittmultiplizität im Nullpunkt des Kartesischen Blattes

$$C = V(X^3 + Y^3 - 3XY)$$

mit jeder affinen Geraden der affinen Ebene.

Aufgabe 13. (4 Punkte)

Sei $K = \mathbb{C}$. Bestimme für die beiden affinen Kurven

$$V(Y - X^3) \text{ und } V(Y^2 - X^3)$$

ihre Schnittpunkte zusammen mit den Schnittmultiplizitäten. Betrachte auch Schnittpunkte im $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ und bestätige den Satz von Bezout in diesem Beispiel.

Aufgabe 14. (3 Punkte)

Zeige, dass es eine rationale Parametrisierung der Hyperbel gibt, aber keine polynomiale Parametrisierung dafür. Erläutere dabei die verwendeten Begriffe.

Aufgabe 15. (6 Punkte)

Sei K ein Körper und seien $F, G \in K[X, Y]$ zwei nichtkonstante Polynome ohne gemeinsamen nichtkonstanten Teiler. Zeige, dass der Durchschnitt $V(F) \cap V(G)$ nur endlich viele Punkte besitzt.

Aufgabe 16. (3 Punkte)

Sei R ein normaler Integritätsbereich und $f \in R, f \neq 0$. Zeige, dass die Nenneraufnahme R_f ebenfalls normal ist.