Algebraische Kurven - Vorlesung 22

Die Einbettungsdimension

Definition 1. Es sei R ein lokaler kommutativer noetherscher Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Dann heißt die minimale Idealerzeugendenzahl für $\mathfrak{m}$ die *Einbettungsdimension* von R, geschrieben

$$\operatorname{embdim}(R).$$

Ein noetherscher lokaler Integritätsbereich der Dimension eins (d.h. die einzigen Primideale sind das Nullideal und das maximale Ideal) ist genau dann ein diskreter Bewertungsring, wenn seine Einbettungsdimension 1 ist. Wir erwähnen, dass die Einbettungsdimension immer zumindest so groß ist wie die Dimension eines lokalen Ringes. Die Ringe, bei denen Gleichheit gilt, spielen eine besondere Rolle und heißen *reguläre Ringe*. Wir sind der Einbettungsdimension schon im Fall von monomialen Kurven begegnet und müssen zeigen, dass die dortige Definition (18.7) mit der neuen verträglich ist.

Wir beweisen zunächst eine andere Charakterisierung, die sich aus dem Lemma von Nakayama ergibt.

Lemma 2. *Sei $(R, \mathfrak{m}, K)$ ein lokaler Ring und sei V ein endlich erzeugter R-Modul. Dann stimmt die minimale Erzeugendenzahl $\mu(V)$ mit der Dimension des K-Vektorraums $V/\mathfrak{m}V$ überein.*

Beweis. Wir zeigen etwas allgemeiner, dass Elemente $v_1, \ldots, v_n \in V$ genau dann ein R-Erzeugendensystem für V bilden, wenn deren Restklassen in $V/\mathfrak{m}V$ ein $R/\mathfrak{m}$-Erzeugendensystem von $V/\mathfrak{m}V$ bilden. Dabei ist die eine Richtung trivial, seien also Elemente $v_1, \ldots, v_n \in V$ gegeben, die modulo $\mathfrak{m}$ erzeugen. Es sei $U \subseteq V$ der von den v_i erzeugte R-Untermodul von V. Die Voraussetzung übersetzt sich zu $V = U + \mathfrak{m}V$. Wir betrachten den Restklassenmodul V/U. Dort gilt dann $(V/U)\mathfrak{m} = V/U$, woraus nach dem Lemma von Nakayama die Gleichheit $V/U = 0$ und $V = U$ folgt. $\square$

Korollar 3. *Sei $(R, \mathfrak{m}, K)$ ein noetherscher lokaler Ring. Dann ist die Einbettungsdimension gleich*

$$\mu(\mathfrak{m}) = \dim_K (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).$$

Beweis. Dies folgt sofort aus Lemma 22.2 angewandt auf das Ideal $\mathfrak{m}$ und den endlich erzeugten R-Modul $\mathfrak{m}$. $\square$

Den in der vorstehenden Aussage auftretenden R-Modul $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, der ein Vektorraum über $R/\mathfrak{m}$ ist, nennt man auch den *Kotangentialraum* des lokalen Ringes.

Lemma 4. *Sei R ein noetherscher kommutativer Ring und $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal. Es sei $S = R_\mathfrak{n}$ die Lokalisierung an $\mathfrak{n}$ mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}R_\mathfrak{n}$. Dann ist*

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \,.$$

Insbesondere ist die Einbettungsdimension der Lokalisierung gleich $\dim_{R/\mathfrak{n}}(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2)$.

Beweis. Bekanntlich ist $R/\mathfrak{n} \cong R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}$, so dass der gleiche Körper zugrunde liegt. Der natürliche R-Modul-Homomorphismus $\mathfrak{n} \to \mathfrak{m}$ induziert einen K-Vektorraum-Homomorphismus

$$\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \,,$$

der surjektiv ist, da R-Modul-Erzeuger von $\mathfrak{n}$ auf $R_\mathfrak{n}$-Erzeuger von $\mathfrak{m}$ abbilden, und diese modulo $\mathfrak{m}^2$ ein K-Vektorraum-Erzeugendensystem ergeben. Sei also $f \in \mathfrak{n}$ ein Element, das rechts auf null abgebildet wird. D.h. es gilt $f \in \mathfrak{m}^2$ in der Lokalisierung $R_\mathfrak{n}$. Dies bedeutet wiederum, dass es Elemente $g_1, \ldots, g_n \in \mathfrak{n}$ und $h_1, \ldots, h_n \in \mathfrak{n}$ und ein Element $s \notin \mathfrak{n}$ (im integren Fall - allgemein ist das Argument unwesentlich komplizierter) gibt mit

$$sf = g_1h_1 + \ldots + g_nh_n \,.$$

Da s nicht zum maximalen Ideal gehört, gibt es $r \in R$ und $g \in \mathfrak{n}$ mit $g + rs = 1$. Wir multiplizieren die obige Gleichung mit r und erhalten

$$(1 - g)f = r(g_1h_1 + \ldots + g_nh_n)$$

bzw.

$$f = r(g_1h_1 + \ldots + g_nh_n) + gf \,.$$

Dabei gehört die rechte Seite offensichtlich zu $\mathfrak{n}^2$, und damit definiert f das Nullelement in $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$. $\square$

Lemma 5. *Sei K ein Körper und M ein numerisches Monoid, das von teilerfremden natürlichen Zahlen erzeugt sei. Es sei $R = K[M]$ der zugehörige Monoidring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{n} = (M_+)$ und der Lokalisierung $R_\mathfrak{n}$. Dann ist die numerische Einbettungsdimension von M (bzw. $K[M]$) gleich der Einbettungsdimension des lokalen Rings $R_\mathfrak{n}$.*

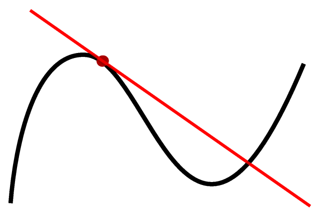
Beweis. Es ist $\mathfrak{n} = (M_+) = \bigoplus_{m \in M_+} K\,T^m$ und $\mathfrak{n}^2 = (2M_+) = \bigoplus_{m \in 2M_+} K\,T^m$. Der Restklassenraum ist daher

$$\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 = \bigoplus_{m \in M_+ - 2M_+} K\,T^m \,.$$

Dessen K-Dimension ist also gleich der Anzahl der Elemente aus $M_+ - 2M_+$. Nach Korollar 18.13 ist $M_+ - 2M_+$ das minimale Monoiderzeugendensystem von M, sodass die Dimension gleich der numerischen Einbettungsdimension ist.

Andererseits ist nach Lemma 22.4 die Dimension von $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ gleich der Einbettungsdimension des zugehörigen lokalen Rings $R_\mathfrak{n}$. $\square$

Glatte und singuläre Punkte



Sei K ein Körper und $F \in K[X,Y], F \neq 0$, ein Polynom ohne mehrfache Faktoren (da wir uns nur für die zugehörige Kurve interessieren, ist dies bei einem algebraisch abgeschlossenen Körper aufgrund des Hilbertschen Nullstellensatzes keine Einschränkung).

Für jeden Punkt $(a,b) \in \mathbb{A}^2_K$, kann man zu den Variablen $X-a$ und $Y-b$ übergehen. Das bedeutet, dass man den Punkt in den Ursprung verschiebt. Für das Verhalten eines Polynoms an einem Punkt kann man sich also stets auf den Ursprungspunkt beschränken.

Sei also $P=(0,0)$. Wir schreiben F mit homogenen Komponenten als

$$F = F_d + F_{d-1} + \ldots + F_1 + F_0 \,.$$

Hier sind die F_i homogen vom Grad i. Was kann man an den einzelnen homogenen Komponenten ablesen? Zunächst gilt trivialerweise die Beziehung

$$P \in V(F) \text{ genau dann, wenn } F_0 = 0 \,.$$

Wenn man die Koordinaten von P, also $(0,0)$, in F einsetzt, so werden ja alle höheren Komponenten zu null gemacht, und lediglich die konstante Komponente F_0 bleibt übrig. Da wir uns hauptsächlich für das Verhalten der Kurve in einem Kurvenpunkt interessieren, werden wir uns häufig auf die Situation $F_0 = 0$ beschränken. Was ist dann die erste homogene Komponente F_i, die nicht null ist? Welche Rolle spielt dieses i und welche Rolle spielen dessen Linearfaktoren?

Nehmen wir zunächst an, dass $F_0 = 0$ und $F_1 = aX + bY$ ist. Diese Linearform (die null sein kann) lässt sich auch mit partiellen Ableitungen charakterisieren, es ist nämlich

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P) = a \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y}(P) = b \,.$$

Hier und im Folgenden werden Polynome einfach *formal abgeleitet* . Damit ist auch $F_1 = 0$ genau dann, wenn $\frac{\partial F}{\partial x}(P) = \frac{\partial F}{\partial y}(P) = 0$ ist. Wenn dies nicht der Fall ist, so ist es naheliegend, die durch die Gleichung $F_1(X,Y) = 0$ definierte Gerade als Tangente an die Kurve im Punkt P anzusehen. Ein erstes Indiz dafür ist, dass im linearen Fall $F = F_1$ die Gerade mit ihrer Tangente zusammenfallen soll.

Definition 6. Sei K ein Körper und $F \in K[X,Y]$ ein von null verschiedenes Polynom. Es sei $P \in C = V(F) \subset \mathbb{A}^2_K$ ein Punkt der zugehörigen affinen ebenen Kurve. Dann heißt P ein *glatter Punkt* von C, wenn gilt

$$\frac{\partial F}{\partial X}(P) \neq 0 \text{ oder } \frac{\partial F}{\partial Y}(P) \neq 0 \,.$$

Andernfalls heißt der Punkt *singulär*.

Definition 7. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \in K[X,Y]$ ein von null verschiedenes Polynom. Es sei $P \in C = V(F) \subset \mathbb{A}_K^2$ ein Punkt der zugehörigen affinen ebenen Kurve, der (nach linearer Variablentransformation) der Nullpunkt sei. Es sei

$$F = F_d + F_{d-1} + \ldots + F_m$$

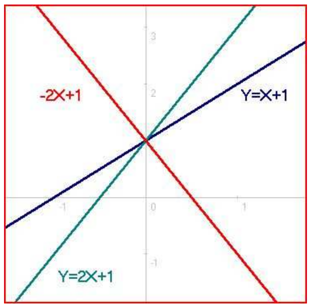
die homogene Zerlegung von F mit $F_d \neq 0$ und $F_m \neq 0$, $d \geq m$. Dann heißt m die *Multiplizität* der Kurve im Punkt P. Sei $F_m = G_1 \cdots G_m$ die Zerlegung in lineare Faktoren. Dann nennt man jede Gerade $V(G_i)$, $i = 1, \ldots, m$, eine *Tangente* an C im Punkt P. Die Vielfachheit von G_i in F_m nennt man auch die *Multiplizität* der Tangente.

Der Punkt ist genau dann glatt, wenn die Multiplizität eins ist. In diesem Fall gibt es genau eine Tangente durch den Punkt, deren Steigung man über die partiellen Ableitungen berechnen kann.

Beispiel 8. Seien d verschiedene Geraden $L_1, \ldots, L_d$ in der affinen Ebene gegeben, die alle durch den Nullpunkt laufen mögen. Es seien $a_iX + b_iY = 0$, $i = 1, \ldots, d$, die zugehörigen Gleichungen (die nur bis auf einen Skalar definiert sind). Die Vereinigung dieser Geraden wird dann durch das Produkt

$$F = (a_1X + b_1Y) \cdots (a_dX + b_dY)$$

beschrieben. Insbesondere ist $F = F_d$ homogen vom Grad d. Hier definiert jeder Linearfaktor eine Tangente durch den Nullpunkt.



Geraden, die sich im Punkt (0,1) schneiden

Bemerkung 9. Für einen glatten Punkt $P \in C = V(F)$ einer ebenen algebraischen Kurve ist die Multiplizität $m = 1$. Bei $P = (0,0)$ ist also der lineare Term der Kurvengleichung $F_1 = uX + vY \neq 0$ und es ist

$$\frac{\partial F}{\partial X}(P) = u \text{ und } \frac{\partial F}{\partial Y}(P) = v$$

(da die höheren homogenen Komponenten von F keinen Beitrag zu den partiellen Ableitungen im Nullpunkt leisten). Diese lineare Gleichung ist also die Tangentengleichung. Auch für einen beliebigen glatten Punkt $P = (a,b) \in C$ kann man aus den partiellen Ableitungen von F in P direkt die Tangentengleichung ablesen, und zwar ist die Tangente gegeben durch

$$\frac{\partial F}{\partial X}(P)(X - a) + \frac{\partial F}{\partial Y}(P)(Y - b) = 0\,.$$

Bemerkung 10. Sei $F \in K[X,Y]$ mit zugehöriger ebener algebraischer Kurve C und sei $P \in C = V(F)$ ein glatter Punkt der Kurve. Zu $F : \mathbb{A}_K^2 \to \mathbb{A}_K^1$ und dem Punkt P gehört die durch die partiellen Ableitungen definierte lineare *Tangentialabbildung* (das *totale Differential*) zwischen den zugehörigen Tangentialräumen, also

$$T_P F = (\frac{\partial F}{\partial X}(P), \frac{\partial F}{\partial Y}(P)) : T_P \mathbb{A}^2_K \cong \mathbb{A}^2_K \longrightarrow T_{F(P)} \mathbb{A}^1_K = T_0 \mathbb{A}^1_K \cong \mathbb{A}^1_K$$

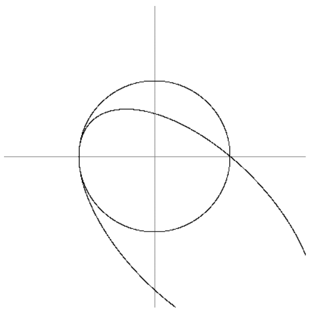
$$\text{mit } (s,t) \longmapsto \frac{\partial F}{\partial X}(P)s + \frac{\partial F}{\partial Y}(P)t$$

Da P ein glatter Punkt ist, ist diese lineare Abbildung nicht die Nullabbildung. Die (Richtung der) Tangente von C an P ist der Kern dieser Tangentialabbildung (wobei man bei der Identifizierung der Tangentialebene in P mit der umgebenden affinen Ebene den Punkt P mit dem Nullpunkt identifizieren muss. Die Tangente muss ja durch den Punkt gehen, der Kern gibt nur eine lineare Richtung vor.)

Die folgenden beiden Ausssagen zeigen, dass ein Kreuzungspunkt zweier irreduzibler Komponenten niemals glatt sein kann.

Lemma 11. *Sei $C = V(F)$ eine ebene algebraische Kurve und $F = F_1 \cdots F_n$ die Zerlegung in verschiedene Primfaktoren. Es sei $P \in C$ ein glatter Punkt der Kurve. Dann liegt P auf nur einer Komponente $C_i = V(F_i)$ der Kurve.*

Beweis. Siehe Aufgabe 22.5. □



Bei einer algebraischen Kurve sind die Schnittpunkte von irreduziblen Komponenten niemals glatt.

Korollar 12. *Sei $C \subseteq \mathbb{A}^2_K$ eine ebene glatte algebraische Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Dann ist C irreduzibel.*

Beweis. Aufgrund von Lemma 22.11 sind die irreduziblen Komponenten der Kurve disjunkt. Dies sind dann aber auch die Zusammenhangskomponenten der Kurve. Also gibt es nur eine irreduzible Komponente und daher ist die Kurve irreduzibel. □

Satz 13. *Sei K ein Körper und R eine K-Algebra von endlichem Typ, und sei $P \in K-\operatorname{Spek}(R)$ ein Punkt mit zugehörigem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Dann ist die Abbildung*

$$d : R \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,\ f \longmapsto df := \overline{f - f(P)}$$

eine Derivation, *d.h. d ist K-linear und es gilt $d(fg) = fdg + gdf$.*

Beweis. Zunächst ist die Abbildung wohldefiniert, da wegen $(f-f(P))(P)=0$ die Funktion $f-f(P)$ zum maximalen Ideal gehört. Die K-Linearität ist trivial. Die Produktregel folgt aus (im dritten Schritt wird ein Element aus $\mathfrak{m}^2$ addiert)

$$\begin{aligned} d(fg) &= fg-(fg)(P) \\ &= fg-f(P)g(P) \\ &= fg-f(P)g(P)+(f-f(P))(g-g(P)) \\ &= 2fg-fg(P)-gf(P) \\ &= f(g-g(P))+g(f-f(P)) \\ &= fdg+gdf\,. \end{aligned}$$

□