Algebraische Kurven - Vorlesung 12

Das K-Spektrum

Alexander Grothendieck (1928-)

Wie hängen affin-algebraische Mengen und deren Koordinatenringe zusammen? Hier kann man nur für nicht-endliche Grundkörper gehaltvolle Antworten erwarten, da es im endlichen Fall zu wenige Punkte gibt. Eine befriedigende Theorie erfordert sogar, dass man sich auf algebraisch abgeschlossene Körper beschränkt, oder aber - das ist der Standpunkt der von Alexander Grothendieck entwickelten Schematheorie - nicht nur K-Punkte betrachtet, sondern generell maximale Ideale und Primideale als Punkte mitberücksichtigt.

Eine erste wichtige Frage ist folgende: eine K-Algebra R von endlichem Typ hat mehrere, in aller Regel gleichberechtigte Darstellungen als Restklassenring einer Polynomalgebra, sagen wir

$$K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a} \cong R \cong K[X_1, \ldots, X_m]/\mathfrak{b}\,.$$

Dazu gehören die beiden Nullstellengebilde $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ und $V(\mathfrak{b}) \subseteq \mathbb{A}_K^m$. Wie hängen diese beiden Nullstellengebilde zusammen?

Beispiel 1. Wir betrachten den Polynomring in einer Variablen $R = K[T]$. Ihm entspricht zunächst die affine Gerade $\mathbb{A}_K^1$. Man kann R aber auch auf ganz verschiedene Arten als Restklassenring einer Polynomalgebra in mehreren Variablen erhalten. Sei beispielsweise $a \in K$, $a \neq 0$, und betrachte den Restklassenring $K[X,Y]/(aY + bX)$. Dieser Ring ist (als K-Algebra) isomorph zu R, wie die Abbildung

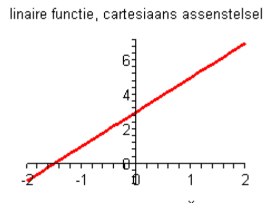
$$K[X,Y]/(aY + bX) \longrightarrow K[T],\ X \longmapsto T,\ Y \longmapsto -\frac{b}{a}T,$$

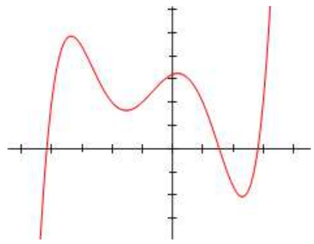
zeigt. Das zugehörige Nullstellengebilde $V(aX + bY)$ ist einfach die Gerade in der affinen Ebene, die durch die Gleichung $Y = -\frac{b}{a}X$ beschrieben wird.

Eine weitere Möglichkeit, den Polynomring in einer Variablen als Restklassenring darzustellen, ist durch $K[X,Y]/(Y - P(X))$ gegeben, wobei $P(X)$ ein beliebiges Polynom in der einen Variablen X ist. Der Ringhomomorphismus

$$K[X,Y]/(Y - P(X)) \longrightarrow K[T],\ X \longmapsto T,\ Y \longmapsto P(T),$$

zeigt, dass ein Isomorphismus vorliegt. Das zugehörige Nullstellengebilde ist einfach der Graph des Polynoms $P(X)$.





Der Punkt an diesem Beispiel ist, dass alle drei geometrischen Objekte die Nullstellenmengen zu verschiedenen Restklassendarstellungen von $K[T]$ sind. Vom Standpunkt der algebraischen Geometrie sind das drei gleichberechtigte Darstellungen der affinen Geraden, auch wenn sie unterschiedlich „aussehen“. In der algebraischen Geometrie muss man so hinschauen, dass sie gleich aussehen. Was man sieht sind nur verschiedene Einbettungen des „eigentlichen und wahren“ geometrischen Objektes, das zu einer K-Algebra intrinsisch gehört, nämlich das K-Spektrum.

Definition 2. Zu einer kommutativen K-Algebra R von endlichem Typ bezeichnet man die Menge der K-Algebra-Homomorphismen

$$\mathrm{Hom}_K(R, K)$$

als das K-*Spektrum* von R. Es wird mit $K - \mathrm{Spek}\,(R)$ bezeichnet.

Die Elemente in einem K-Spektrum $K - \mathrm{Spek}(R)$ betrachten wir als Punkte und bezeichnen sie üblicherweise mit P, obwohl es definitionsgemäß Abbildungen sind, nämlich K-Algebra-Homomorphismen von R nach K. Für ein Ringelement $f \in R$ schreiben wir dann auch einfach $f(P)$ (statt $P(f)$) für den Wert von f unter dem mit P bezeichneten Ringhomomorphismus (es ist nicht unüblich, einen Punkt als eine Auswertung von Funktionen anzusehen, die in einer gewissen Umgebung des Punktes definiert sind).

Das K-Spektrum wird wieder mit einer *Zariski-Topologie* versehen, wobei zu einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ (oder zu einer beliebigen Teilmenge aus R) die Teilmenge

$$V(\mathfrak{a}) = \{P \in K - \mathrm{Spek}(R) : f(P) = 0 \text{ für alle } f \in \mathfrak{a}\}$$

als abgeschlossen erklärt wird. In der Tat wird dadurch eine Topologie definiert, siehe Aufgabe 12.1.

Lemma 3. *Sei K ein Körper und sei $K[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring in n Variablen. Dann stehen die K-Algebra-Homomorphismen von $K[X_1, \ldots, X_n]$ nach K in natürlicher Weise in Bijektion mit den Punkten aus dem affinen Raum $\mathbb{A}_K^n = K^n$, und zwar entspricht dem Punkt $(a_1, \ldots, a_n)$ der Einsetzungshomomorphismus $X_i \mapsto a_i$. Mit anderen Worten,*

$$K - \mathrm{Spek}(K[X_1, \ldots, X_n]) = \mathbb{A}_K^n .$$

Beweis. Ein K-Algebra-Homomorphismus ist stets durch ein K-Algebra Erzeugendensystem festgelegt. D.h. die Werte an den Variablen X_i legen einen K-Algebra-Homomorphismus von $K[X_1, \ldots, X_n]$ nach K fest. Ein solcher

Einsetzungshomomorphismus ist durch $X_i \mapsto a_i$ definiert. Zugleich ist hier jede Vorgabe von Werten $(a_1, \ldots, a_n)$ erlaubt. $\square$

Beispiel 4. Das K-Spektrum zur K-Algebra K besteht einfach aus einem Punkt, und zwar ist die Identität $K \to K$ der einzige K-Algebra-Homomorphismus von K nach K. Es gibt im Allgemeinen weitere Körperautomorphismen auf K, doch diese sind keine K-Algebra-Homomorphismen.

Entscheidend ist nun der folgende Satz, der eine bijektive Beziehung zwischen dem K-Spektrum von R und dem Nullstellengebilde stiftet, das von einer Restklassendarstellung von R herrührt.

Satz 5. *Sei K ein Körper und sei R eine endlich erzeugte kommutative K-Algebra mit K-Spektrum $K - \operatorname{Spek}(R)$. Es sei $R = K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$ eine Restklassendarstellung von R mit dem zugehörigen Restklassenhomomorphismus $\varphi : K[X_1, \ldots, X_n] \to R$ und dem Nullstellengebilde $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$. Dann stiftet die Abbildung*

$$K - \operatorname{Spek}(R) \longrightarrow \mathbb{A}_K^n,\ P \longmapsto P \circ \varphi\,,$$

eine Bijektion zwischen $K - \operatorname{Spek}(R)$ und $V(\mathfrak{a})$, die bezüglich der Zariski-Topologie ein Homöomorphismus ist.

Beweis. Zunächst ist die angegebene Abbildung wohldefiniert, da die Hintereinanderschaltung

$$P \circ \varphi : K[X_1, \ldots, X_n] \xrightarrow{\varphi} K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a} \cong R \xrightarrow{P} K$$

einen K-Algebra-Homomorphismus vom Polynomring nach K definiert, der nach Lemma 12.3 der Einsetzungshomomorphismus zu $(a_1, \ldots, a_n)$ ist und mit dem entsprechenden Punkt des affinen Raumes identifiziert werden kann.

Da der Homomorphismus $P \circ \varphi$ durch R faktorisiert, wird das Ideal $\mathfrak{a}$ auf 0 abgebildet. D.h. der Bildpunkt $P \circ \varphi = (a_1, \ldots, a_n)$ liegt in $V(\mathfrak{a})$, und es liegt eine Abbildung

$$K - \operatorname{Spek}(R) \longrightarrow V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n,\ P \longmapsto P \circ \varphi\,,$$

vor, die wir als bijektiv nachweisen müssen.

Seien dazu $P_1, P_2 \in K - \operatorname{Spek}(R)$ zwei verschiedene Punkte. Es liegen also zwei verschiedene K-Algebra Homomorphismen vor, und da ein K-Algebra-Homomorphismus auf einem K-Algebra Erzeugendensystem festgelegt ist, müssen sich die beiden auf mindestens einer Variablen unterscheiden. Dann ist aber auch der Wert der zugehörigen Koordinate verschieden, d.h. $P_1 \circ \varphi \neq P_2 \circ \varphi$, und die Abbildung ist injektiv.

Zur Surjektivität sei ein Punkt $(a_1, \ldots, a_n) \in V(\mathfrak{a})$ vorgegeben. Der zugehörige K-Algebra-Homomorphismus

$$K[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow K,\ X_i \longmapsto a_i\,,$$

annuliert daher jedes $F \in \mathfrak{a}$, so dass dieser Ringhomomorphismus durch $K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$ faktorisiert. Dieser Ringhomomorphismus ist das gesuchte Urbild aus $K - \text{Spek}(R)$.

Zur Topologie muss man einfach nur beachten, dass für $G \in R$ und einem Urbild $\tilde{G} \in K[X_1, \ldots, X_n]$ und einem Punkt $P \in K - \text{Spek}(R)$ mit Bildpunkt $\tilde{P} = P \circ \varphi \in V(\mathfrak{a})$ gilt:

$$G(P) = P(G) = P(\varphi(\tilde{G})) = (P \circ \varphi)(\tilde{G}) = \tilde{G}(\tilde{P}),$$

so dass auch die Nullstellen übereinstimmen. □

Dieser Satz besagt also, dass man jedes K-Spektrum einer endlich erzeugten K-Algebra R mit einer Zariski-abgeschlossenen Menge eines $\mathbb{A}_K^n$ identifizieren kann. Man spricht von einer *abgeschlossenen Einbettung*.

Korollar 6. *Sei K ein Körper und R eine endlich erzeugte kommutative K-Algebra mit zwei Restklassendarstellungen*

$$R \cong K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a} \text{ und } R \cong K[X_1, \ldots, X_m]/\mathfrak{b}$$

mit zugehörigen Nullstellengebilden $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ und $V(\mathfrak{b}) \subseteq \mathbb{A}_K^m$. Dann sind die beiden Nullstellengebilde $V(\mathfrak{a})$ und $V(\mathfrak{b})$ mit ihrer induzierten Zariski-Topologie homöomorph zueinander.

Beweis. Nach Satz 12.3 sind beide Nullstellen homöomorph zu $K - \text{Spek}(R)$, so dass sie auch untereinander homöomorph sein müssen. □

Das K-Spektrum als Funktor

Satz 7. *Sei K ein Körper und seien R und S zwei kommutative K-Algebren von endlichem Typ. Es sei $\varphi : R \to S$ ein K-Algebra-Homomorphismus. Dann induziert dies eine Abbildung*

$$\varphi^* : K - \text{Spek}(S) \longrightarrow K - \text{Spek}(R),\ P \longmapsto P \circ \varphi .$$

Diese Abbildung ist stetig bezüglich der Zariski-Topologie.

Beweis. Die Existenz der Abbildung ist klar, dem K-Algebra-Homomorphismus $P : S \to K$ wird einfach die Hintereinanderschaltung

$$R \xrightarrow{\varphi} S \xrightarrow{P} K$$

zugeordnet. Das Urbild der offenen Menge $D(f) \subseteq K - \text{Spek}(R)$ ist dabei

$$\begin{aligned}
(\varphi^*)^{-1}(D(f)) &= \{P \in K - \text{Spek}(S) : \varphi^*(P) \in D(f)\} \\
&= \{P \in K - \text{Spek}(S) : P \circ \varphi \in D(f)\} \\
&= \{P \in K - \text{Spek}(S) : (P \circ \varphi)(f) \neq 0\} \\
&= \{P \in K - \text{Spek}(S) : P(\varphi(f)) \neq 0\} \\
&= D(\varphi(f)) .
\end{aligned}$$

Daher sind generell Urbilder von offenen Mengen wieder offen und die Abbildung ist stetig. □

Die in Satz 11.7 eingeführte Abbildung φ^* nennt man die *Spektrumsabbildung* zu φ:

Proposition 8. *Es sei K ein Körper und zu einem K-Algebra-Homomorphismus $\varphi : R \longrightarrow S$ zwischen K-Algebren von endlichem Typ sei φ^* die zugehörige Spektrumsabbildung. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Zu einem K-Algebra-Homomorphismus $P : R \to K$ ist die induzierte Spektrumsabbildung P^* einfach die Abbildung, die dem einzigen Punkt $\{\mathrm{id}\} = K - \mathrm{Spek}\,(K)$ den Punkt $P \in K - \mathrm{Spek}\,(R)$ zuordnet.*

(2) *Der durch ein Element $F \in R$ definierte Einsetzungshomomorphismus*
$$\varphi : K[T] \longrightarrow R,\, T \longmapsto F,$$
induziert die Spektrumsabbildung
$$\varphi^* : K - \mathrm{Spek}\,(R) \longrightarrow K - \mathrm{Spek}\,(K[T]) = \mathbb{A}^1_K,\; P \longmapsto F(P)\,.$$

(3) *Zu einer surjektiven Abbildung $\varphi : R \longrightarrow S$ von K-Algebren von endlichem Typ ist die zugehörige Spektrumsabbildung*
$$\varphi^* : K - \mathrm{Spek}\,(S) \longrightarrow K - \mathrm{Spek}\,(R)$$
eine abgeschlossene Einbettung, und zwar ist das Bild gleich $V(\ker(\varphi))$.

(4) *Die zu einer surjektiven Abbildung $K[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow S$ gehörende Spektrumsabbildung*
$$\varphi^* : K - \mathrm{Spek}\,(S) \longrightarrow K - \mathrm{Spek}\,(K[X_1, \ldots, X_n]) \cong \mathbb{A}^n_K$$
stimmt mit der in Satz 12.5 definierten Abbildung überein.

Beweis. (1). Dies folgt aus $\mathrm{id} \circ P = P$.

(2). Unter der hintereinandergeschalteten Abbildung
$$K[T] \xrightarrow{\varphi} R \xrightarrow{P} K$$
wird T auf $P(F) = F(P)$ geschickt.

(3) beruht auf ähnlichen Betrachtungen wie sie im Beweis zu Satz 12.5 durchgeführt wurden. Das zeigt auch (4). □

Weitere Eigenschaften des K-Spektrums

Lemma 9. *Sei K ein Körper und R eine endlich erzeugte kommutative K-Algebra. Dann ist*
$$K - \mathrm{Spek}\,(R[X]) \cong K - \mathrm{Spek}\,(R) \times \mathbb{A}^1_K\,.$$

Beweis. Ein K-Algebra-Homomorphismus $R[T] \to K$ induziert einen K-Algebra-Homomorphismus $R \to K$, und zugleich wird T auf ein bestimmtes Element $a \in K$ abgebildet. Diese Daten definieren aber auch einen eindeutig bestimmten K-Algebra-Homomorphismus $R[T] \to K$. $\square$

Achtung: Die vorstehende Aussage liefert nur eine natürliche Bijektion auf der Punktebene. Würde man die Produktmenge rechts mit der Produkttopologie versehen, so würde hier keine Homöomorphie mit der Zariski-Topologie links vorliegen. Insbesondere ist $\mathbb{A}^2_K \cong \mathbb{A}^1_K \times A^1_K$, aber die Zariski-Topologie der affinen Ebene ist nicht die Produkt-Topologie der affinen Geraden mit sich selbst.

Bemerkung 10. Sind $X = K - \operatorname{Spek}(R)$ und $Y = K - \operatorname{Spek}(S)$, so lässt sich die Produktmenge ebenfalls als K-Spektrum einer K-Algebra darstellen, und zwar ist

$$X \times Y \cong K - \operatorname{Spek}(R \otimes_K S)\,,$$

wobei $\otimes$ das Tensorprodukt bezeichnet. Wir werden darauf nicht im Einzelnen eingehen. Um aber doch ein Gefühl dafür zu geben betrachten wir $R = K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$ und $S = K[Y_1, \ldots, Y_m]/\mathfrak{b}$. Dann ist

$$R \otimes_K S \cong K[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$$

(bei dieser ad hoc Definition ist nicht klar, dass sie unabhängig von den Darstellungen als Restklassenring ist).