Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2008/2009**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 7

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei K ein unendlicher Körper und sei $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein von null verschiedenes Polynom. Zeige, dass dann die Nullstellenmenge $V(F)$ nicht der gesamte affine Raum $\mathbb{A}_K^n$ ist. (Aus dieser Aufgabe folgt auch Aufgabe 3.8.)

Aufgabe 2. (9 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2,\ (u,v) \longmapsto (u^2+uv, v-u^2) = (x,y)\,.$$

Bestimme zu den drei folgenden Scharen aus parallelen Geraden die Bildkurven der Geraden unter dieser Abbildung (man gebe sowohl eine Parametrisierung als auch eine Kurvengleichung).

(1) Die zur u-Achse parallelen Geraden,
(2) die zur v-Achse parallelen Geraden,
(3) die zur Antidiagonalen parallelen Geraden.

Bestimme zu jeder Schar, ob sich die Bildkurven überschneiden.

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Betrachte die beiden Kreise

$$X^2 + Y^2 = 1 \text{ und } 4X^2 + 3Y^2 = 9\,.$$

Zeige, dass die beiden Kreise über $\mathbb{R}$ affin-linear äquivalent sind, aber nicht über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 4. (6 Punkte)

Finde für die verschiedenen reellen Quadriken eine Realisierung als Kegelschnitt, also als Schnitt einer Ebene mit dem Kegel $V(x^2+y^2-z^2)$, oder beweise, dass es eine solche Realisierung nicht gibt.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Transformiere die Quadrik

$$2x^2 + xy - 3y^2 + 5x - y + 3$$

auf eine reelle Standardgestalt.

Aufgabe 6. (6 Punkte)

Wir betrachten die beiden Restklassenringe

$$R = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1) \text{ und } S = \mathbb{R}[X,Y]/(XY-1)\,.$$

(Das sind die Ringe, die zum reellen Kreis und zur reellen Hyperbel gehören.) Zeige: S ist ein Hauptidealbereich, R hingegen nicht. Tipp: Man betrachte für R das Ideal $(X-1, Y)$.

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Parametrisiere die durch

$$F = 2x^2 - xy + 3y^2 + x - 5y$$

definierte Quadrik mit Hilfe des Nullpunktes und der Geraden $V(y-1)$.

Aufgabe 8. (6 Punkte)

Parametrisiere die durch

$$F = x^2 + 2xy - y^2 + x - 3y + 4$$

definierte Quadrik $Q = V(F)$ mit Hilfe des Punktes $(1,2) \in Q$ und der y-Achse. Führe keine Variablentransformation durch.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Betrachte die durch

$$C = V(X^{d+1} - Y^d)$$

definierte algebraische Kurve C ($d \geq 1$). Zeige, dass man mit der im Beweis zu Satz 7.6 beschriebenen Methode mit dem Nullpunkt und der Geraden $V(X-1)$ eine Parametrisierung von C erhält.

Aufgabe 10. (6 Punkte)

Sei $F \in K[X,Y]$ ein irreduzibles Polynom. Zeige, dass die Kurve $V(F)$ genau dann rational ist, wenn es einen injektiven K-Algebra-Homomorphismus

$$Q(K[X,Y]/(F)) \longrightarrow K(T)$$

gibt. (Hier steht links der Quotientenkörper und rechts der rationale Funktionenkörper.)