Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2008/2009**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 5

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \in K[X, Y]$ ein homogenes Polynom. Zeige: F zerfällt in Linearfaktoren.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Sei $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom mit Nullstellenmenge $V(F)$. Zeige, dass für jeden Punkt $P \in V(F)$ gilt, dass auch $\lambda P \in V(F)$ ist für jeden Skalar $\lambda \in K$.

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Wie viele Monome vom Grad d gibt es im Polynomring in einer, in zwei und in drei Variablen?

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Zeige, dass ein homogenes Polynom unter einer linearen Variablentransformation homogen vom gleichen Grad bleibt, und dass dies bei einer affin-linearen Variablentransformation nicht sein muss.

Die folgenden drei Aufgaben dienen dem Verständnis von Satz 5.4 und Korollar 5.5.

Aufgabe 5. (1 Punkt)

Wende den Beweis zu Satz 5.4 auf das Polynom Y an.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Wende den Beweis zu Satz 5.4 auf die algebraische Kurve an, die zur rationalen Funktion

$$Y = \frac{X^2 - 2X}{X^2 - 1}$$

gehört.

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Sei $F \in \mathbb{C}[X,Y]$ ein nicht-konstantes Polynom. Zeige, dass die zugehörige algebraische Kurve $C = V(F)$ überabzählbar viele Elemente besitzt.

Aufgabe 8. (1 Punkt)

Berechne das Bild $\tilde{F}$ des Polynoms

$$F = X^2Y + 3XY - Y^3$$

unter dem durch

$$X \longmapsto T^2 + S - 3,\ Y \longmapsto 3TS + S^2 - T$$

definierten Einsetzungshomomorphismus

$$K[X,Y] \longrightarrow K[S,T]\,.$$

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathbb{A}^2_K\,,\ (x,y) \longmapsto (x,xy)\,.$$

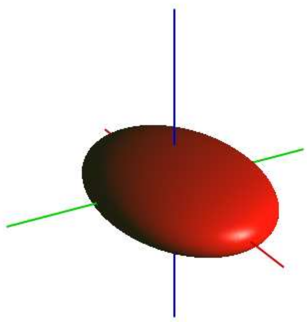
Bestimme das Bild und die Fasern dieser Abbildung.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Betrachte das *Ellipsoid*

$$E = V(2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 5) = \{(x,y,z) :\ 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 5\}\,.$$

Finde eine affin-lineare Variablentransformation derart, dass das Bild von E unter der Abbildung die *Standardkugel* $V(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ wird.



Ein Ellipsoid: In der algebraischen Geometrie ist damit die Oberfläche gemeint.

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Seien V und $\tilde{V}$ affin-algebraische Mengen in $\mathbb{A}^2_K$ zu $K = \mathbb{Z}/(2)$. Zeige, dass diese beiden Mengen affin-linear äquivalent sind genau dann, wenn sie die gleiche Anzahl besitzen. Zeige ebenso, dass dies bei $K = \mathbb{Z}/(p)$ für $p \geq 3$ und auch für $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}/(2)}$ für $n \geq 3$ nicht gilt.